万能性を有する論理回路の研究

伊 吹　公 夫

目　次

第一章　序　　　論

1.1　本研究の目的

古くは自動電話交換機より，最近の大型電子計算機をはじめとする制御用電子機器の数々に至るまで，論理回路素子の用途は，年と共に益々その応用の範囲を広めつつある。これらの装置は，何千何万という論理回路素子から構成されている。それが量産性を持つためには，少数種の基本論理素子から，すべての回路網が構成されなければならない。

論理素子には継電器，真空管論理回路，半導体論理回路，磁気論理回路等々，種々の物理的実現方法をとるが，その性質は，素子への入力の組合せに対して，如何なる出力を出すかの相対関係によって規定し得る。論理回路として実用されているのは，二値論理回路であって，その入力並びに出力は，接点の開閉，電流の導通と不導通，パルスの有無，N極とS極等，離散的な二つの値のいずれかをとる。入力を変数，出力を関数値とするこの入出力関係は二値論理関数に対応づけて表現される。（以後，特別に断ることなく二値論理関数のことを論理関数と呼ぶ。）素子を表現する論理関数が等しいものは，その物理的実現法の如何にかかわらず，回路合成設計上同じ性質を持つとして取扱うことができる。

一般に数種の論理素子の組を撰んだとき，この相互接続並びに素子数を如何ようにしても表現できないような論理関数がある場合と如何なる論理関数で表現される回路でも，撰ばれた素子を適当に相互接続することにより実現可能な場合とがある。後者のような性質を有する論理素子の組を万能性を有する論理回路の組又は万能系と呼ぶ。この万能性とそれを有する論理回路の組の性質を究明するのが，本研究の主要テーマである。

基本論理素子として，古くから継電器回路があり，これは接点の開閉，直並列接続により，肯定，否定，アンド，オアの4種の基本機能を持ち，これを組合せて，任意の機能を持った論理回路網を構成できる。

万能な半導体の回路素子としては，アンド回路とオア回路と否定回路との組合せが広く使用されている。また，唯一種の基本素子で回路網を構成することにより，任意の論理機能が実現できるものとして，ナンド回路もよく用いられている。パラメトロン回路では，多数決回路と否定と常数の組合せを用いている。

エサキ・ダイオードを用いた回路では，通常の接続法では万能なものが得がたいので，二線式論理と称する特殊な信号形式を用いて，多数決回路と常数で万能系を得ている。

新しい素子を発明するとき，それが万能系であるか，又，そうでなければ，何を加えれば

万能系になるかということが重要な問題である。

旧来の素子では，比較的単純な回路が基本素子として用いられてきたが，近年，集積回路の発達と共に，複雑な回路を一つのティップとして用いるようになり，この万能な基本素子系として，何を撰べばよいかを容易に検証する手段を与えることが，大きな工学的問題の一つとなっている。更に進んで，万能でない組合せがあったとき，これにどのような性質を持った素子を追加すれば，万能になるかという問題が，一般的に見出せれば極めて有用である。たとえて言えば，個々の場合について得た結果を算術的に検証する従来の方法でなく，追加すべき素子の性質を求める際，代数的に方程式が解けることが重要である。

今後，大容量集積回路の製造技術が発展すれば，可変論理回路，あるいはセルラー・ロジックと呼ばれる技術の実用化の可能性も増し，この分野では，相互接続に特定の制限がある場合の万能性をも解かねばならないので，通常の論理回路網の理論のみでなく，さらに一般的に論じておく必要がある。

以上の諸点から，本研究では，万能系の問題を一般的に論じ，代数的に扱えるようにした。その応用として，時間要素を考慮しない論理回路，二線式論理回路，時間遅れを伴う論理回路の三つの場合について，具体的に詳論した。

現在，実用に供されている回路方式はすべてこの三形式で尽されている。可変論理回路網等の接続制限のある場合には，この制限条件の種類毎に，回路網の合成法が定まり，個々に本論文の一般的方法を適用すればよいが，本研究では取扱っていない。しかし，本研究の成果は，その方面への応用の基礎となるものと考えられる。

なお，本論文は筆者の１９６２年から，１９６４年にかけての研究の成果をまとめたものである。

1.2　万能性を有する論理回路研究の沿革

本研究の対象である論理回路の万能性の研究は，古くより論理関数の完全系の問題として扱われてきた。時間要素を考慮しない論理回路では，論理関数の場合と全く同等に扱える。近年，時間遅れを伴う論理回路網の研究が盛んである。従来における本分野の研究の沿革を展望することによって，本研究の位置を明らかにしよう。

論理関数の万能系の問題は今世紀の初頭より研究がなされている。最初は特定の基本関数の組合せで，任意の論理関数が生成できることを示すことにはじまる。

１９０４年，E. V. Huntington[1] が

$$x \cdot y,\ x+y,\ \overline{x},\ 0,\ 1$$

が万能なことを示し，さらに

$$x+y,\ \bar{x},\ 0,\ 1$$

の組もまた万能なることを示した。

その後，各種の万能系の例が多くの研究者によって提出された。１９１３年，H. M. Sheffer[(2)] は唯一個の関数で万能系をなすものとして，Sheffer Stroke

$$x \mid y$$

が万能なることを示した。

以上は個々の関数系の例について，その万能性を論じたものである。

万能関数系の問題を組織的に扱ったものとしては，１９４１年にE. L. Post[(3)]が，本質的に相異なる万能系３６種のカタログを与えている。また，１９４２年にW. Wernick[(4)]が２変数以下のすべての既約万能系を求めている。

論理関数の万能系の問題が一般的に解けるためには，論理関数集合の無限にあり得る組合せについての検討を，有限個の同値類の組合せの検討に帰着せしめることが可能でなければならない。筆者及び苗村，野崎[(5)]は１９６３年に論理関数が万能系を構成するか否かという観点からみた同値性で，論理関数を類別し，これが有限個の類に分類できることを発見した。これにより，無限であり得る組合せの検討を，１５個の類の組合せの検討に帰着させ，その結果，既約万能系は互に同値でない４２種のものが存在し，しかも，この同値性のもとに，これと異なる既約万能系は存在しないことを示した。また，万能系の必要充分条件を検討しやすい形で与え，その性質を表現する特性ベクトルを定義した。これを用いて，非万能なる関数の組合せがあったとき，これに何を追加すれば万能になるかという問題を代数的に解けるようにし，一般的な解決を与えた。

基本論理素子を用いて，論理回路網を合成する問題に関しては，１９３５年に中島[(6)]が，また１９３８年にC. E. Shannon[(7)]がそれぞれ独立に

$$x+y,\ x\cdot y,\ \bar{x}$$

の３種の回路の組で，任意の論理回路網を合成できること，つまり万能系であることを示している。

一方，実際の論理回路網で扱う信号は時間と共に変化する。また，論理素子を通る信号は入出力間で時間遅れがある。１９５６年頃より，有限オートマトン理論の一環として，同期式論理回路の万能性の問題が注目され始めた。

１９５６年，S. C. Kleene[(8)]は一定遅延を伴った禁止入力のある多数決回路で任意の論理回路網が構成できることを明らかにした。また，同年，M. L. Minsky[(9)]はアンドとオア

と非単調関数回路の系が万能なこと，並びに単調関数の回路の系は万能でないことを証している。その後，種々の万能例が多くの研究者によって求められている。

１９６１年，D.N.Arden[10] は「一定時間遅れを伴うSheffer Stroke 回路が万能でない」という事実を証明することにより，遅れを伴う回路の万能性は，論理関数の万能性とは異ることを指摘している。あわせて，

「素数時間差の遅延回路が構成できることとある時間遅れの任意回路が構成できれば，そのような系は万能である。」

という定理を得ている。しかしながら，この定理は殆んど万能性の定義の置換えに過ぎず，具体的に万能な素子の性質を与えるものではない。

彼は同一論文内で，二線式論理回路の万能性は論理関数の場合よりも弱い条件であることを示す実例を述べている。但し，その条件が何であるかは未解決であった。

筆者は，先に論理関数の万能性の問題を扱った理論を１９６４年,[11] 更に一般化して，極大系（極大非万能関数集合系）という概念を導入した。一般に合成手続きと万能の定義が与えられたとき，特性ベクトル決定の規準となる極大非万能集合系の満足する三条件を与えた。これを用いて，二線式論理回路の場合と一定遅延を伴う論理回路の場合の万能性の問題を論理関数の場合と同様，完全に解決した。

ここに得られた一般手順を用いて，二線式論理回路の互に同値でない極小万能系２８種を得た。また，遅延を伴う論理回路の互に同値でない極小万能系９３種を得た。それぞれ，この同値性のもとに，これと異なる既約万能系のないことを示した。

なお，筆者等の論文は日本で発表された関係上，米国において，H.H.Loomis 等が筆者より２年遅れて１９６５年，独立にこの問題を発表している。[12][13] しかし，筆者等の到達した段階には達していない。すなわち，筆者等は既約万能系として，１個で構成されるもの１種，２個で構成されるもの１７種，３個で構成されるもの２２種，４個で構成されているもの２種，計４２種でこれ以外にないことを一般的な方法で証明したが，H.H.Loomis 等は，既約万能系の構成要素の最大は４個であることのみを別の方法で証明している。[12] 又，遅延を伴う素子に関して，素子 $f\equiv 1$ と $f\equiv 0$ がある場合についての万能性の条件を求め，これがない場合の一般的条件は重要な今後の研究課題であると述べているが,[13] 既に彼の発表の前年に筆者によって完全に一般的条件が解かれている。[11]

本論文で扱う概念は万能（universal）又は完全（complete）という二つの呼称が一般に用いられている。前者は有限オートマン理論や論理回路網の方で，後者は論理関数や論理回路網の一部で用いている。本論文では工学方面で多く用いられている「万能」という呼

称を用いることにした。

なお，本節における論文の発表時期は該当雑誌等の発表年によっている。

1.3　本論文の構成

本論文は論理回路の万能系の問題に一般的解法を与え，この方面の応用の基礎を与えることを目的としたもので，次の5章からなる。

第2章では万能系の理論を，回路構成法，万能の定義如何に関せず，一般的に論じる。すなわち，適当に撰んだ集合の組が極大系の三条件を満すとき，この集合の各々に属するか否かに対応し，その成分がそれぞれ0または1の値をとる特性ベクトルの演算により万能系の問題を一般的に解けるアルゴリズムを与える。これにより，個々の回路構成法，万能の条件が与えられたとき，極大系の3条件を満す集合の組を見付ければ，万能系の問題が完全に解けることになる。

第3章では4，5，6章で用いるための準備となる論理関数理論と，各々の場合に極大系の要素となる関数集合の定義と諸性質を明らかにする。

第4章では時間要素を考慮しない論理回路並びに論理関数の極大系を求め，万能性の問題を第2章の手法を用いて論ずる。

第5章では二線式論理回路網の万能性の問題を同様の手法で論じる。

第6章では時間遅れを伴う論理回路の万能性の問題を同様の手法で論じる。

本研究は，文献〔5〕，〔6〕，〔7〕，〔11〕に発表されている。

第二章　万能性を論ずるための一般的手法

2.1　緒　　論

第四章以下では，具体的な接続条件，万能の定義の下に，二値論理要素の万能系の問題を扱うが，これに先だち，本章では，これらのすべての集合に適用できる一般的な解決のアルゴリズムを論ずる。

まず，論理素子集合，及び，その合成法の諸定義を明確にする。次に，有限個の集合の系が極大系となる3条件を定義する。一方，論理素子の万能に関する同値性を，万能となるために追加すべき集合が一致するということで定義する。そこで，前記，極大系の要素である各集合に論理素子が含まれるか否かで分類した場合の類とこの同値性で分類した類が一致するという定理を得る。この定理により，万能系の問題は極大系の各要素集合に含まれるか否かを示す特性ベクトルを用いて，既約万能系のすべてを求める手順や，万能となるために非万能素子に追加すべき素子の性質等を一般的に解く。

かくして，第四章以下の具体的応用例のための一般的アルゴリズムを与える。

2.2　論理素子と論理回路

自動交換機や電子計算機等の論理機器は，電流の導通と不導通，回路の短絡と開閉等の2つの状態で表現される信号を取扱い，これによって複雑な論理機能を果している。このような機器を二値論理信号を扱う論理回路と呼んでいる。論理回路は一般に，論理素子を布線で接続して構成されている。

たとえば，第2.2.1図はトランジスタを用いたナンド回路で，論理素子の代表例の一つである。入力xとyに共に信号がないとき，出力zに信号を出す働きを持つ回路である。これを論理式で表現すると

$$z = \overline{x \cdot y} \qquad (2.2.1)^{*}$$

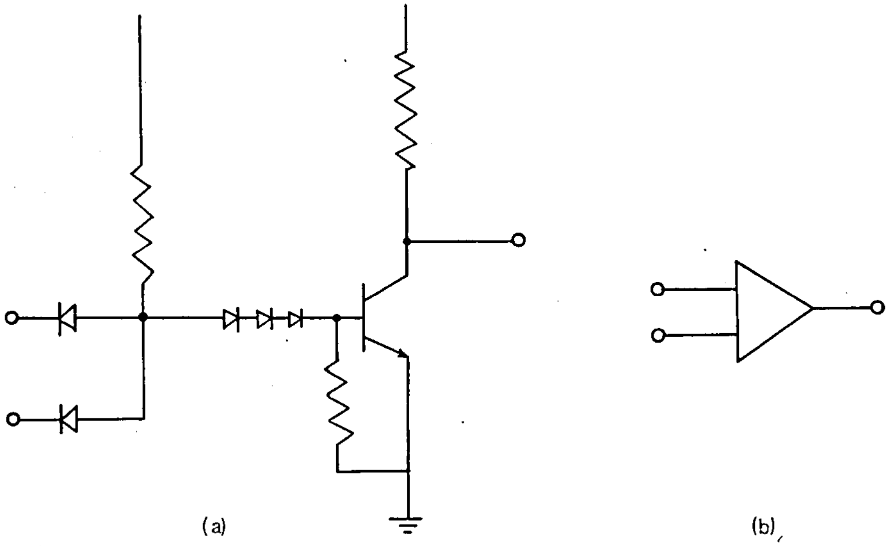
と表せる。この回路を略して，第2.2.1図(b)のような記号で表すことにする。

いま，半加算器，つまり

$$z = x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \qquad (2.2.2)$$

で表せる回路を，上の素子を使用して構成すると，第2.2.2図のようになる。このように論

* 本論文では論理和を＋，論理積を・または記号を省略する。否定は $\overline{}$ にて表現することとする。



第 2. 2. 1 図　ナンド回路

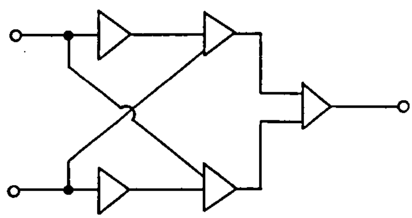
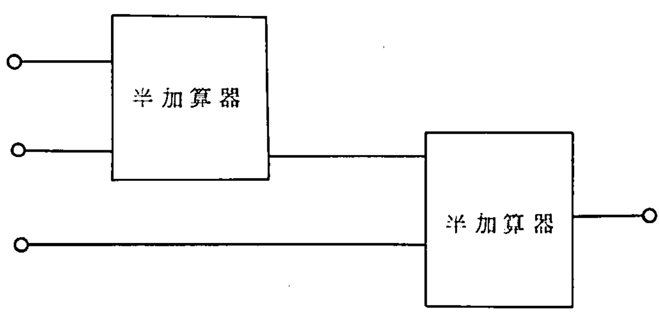


図 2. 2. 2 図　半加算器



第 2. 2. 3 図　全加算器

理素子を布線で結んで構成した装置を論理回路と呼んでいる。

半加算器もこれを一つの単位と考えれば，論理素子とみることができ，これで更に複雑な論理回路を構成できる。第2.2.3図は半加算器で構成された全加算器

$$z = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz$$

である。このようにある機能を持った装置を論理回路と呼ぶか，論理素子と呼ぶかは本質的な差はなく，何を単位と考えるかで定まる。

論理素子の組が定まっているとき，与えられた仕様の論理回路を構成する問題がある。これを回路合成の問題と呼んでおり，論理的動作をなす機器を設計する上に実用上重要な問題である。

この例で示したように，ナンド回路で任意の論理回路が構成できることはよく知られている。しかしながら，ある論理素子を撰んだとき，常に，これで任意の論理回路が構成できるとは限らない。たとえば，アンド回路

$$x \cdot y$$

とオア回路．

$$x + y$$

との組合せでは，通常の信号形式を持つ方式で

$$x\bar{y} + \bar{x}y$$

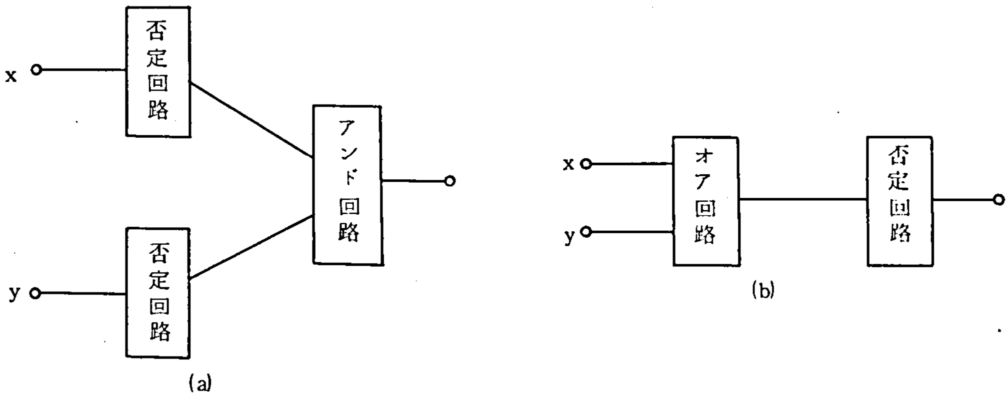
なる機能を持つ半加算器を構成し得ないことが知られている。このように，ある論理素子の組合せをとったとき，前述のナンド回路のように任意の論理回路を構成し得るものと，アンド回路とオア回路の組合せのように，これをどのように組合わせても構成し得ない実例（$x\bar{y} + \bar{x}y$）の存在するものとがある。前者を万能な論理素子の集合，後者を非万能な論理素子の集合と呼ぶ。

では，どのような素子が万能か。それを検証するアルゴリズムは何か。また，上記の例のように非万能な組合せがあったとき，これに何を追加すれば万能になるか。それを求める簡単なアルゴリズムがあるか等の問題は論理素子の撰択の際に重要な問題である。本論文の主要主題は，このような論理素子の万能性の問題を論じ，解決を与えることである。

本章で論ずる万能性の一般理論は，その論旨より論理関数乃至論理回路に限らず適用できるが，一応，考慮の対象を論理回路に限って論ずることにする。以下，用語の簡略のため，「素子」，「回路」等「論理」を冠することを省略する。

2.3 諸　定　義

回路は一般に素子から構成されることは前節で述べた。素子から定まった合成法で合成した合成回路をまた一つの素子とみなすことができる。たとえ，その合成順序が異なっても，回路の入力と出力の関係が等しいとき，それは同一の回路であると呼ぶ。回路への入力と出力の関係が異なるときのみ，異なる回路であると呼ぶ。



第2.3.1図　(a)　$\overline{x}\cdot\overline{y}$

(b)　$\overline{x+y}$

たとえば，第2.3.1図の(a)の回路

$\overline{x}\cdot\overline{y}$

と同図(b)の回路

$\overline{x+y}$

とは，その構成法が異なるが，入出力関係はいずれも第2.3.1表に示すように対応する同一入力に対して同一の出力を出すから，(a)と(b)とは同一の回路であると呼ぶ。

第2.3.1表　$\overline{x}\cdot\overline{y}$ と $\overline{x+y}$ の入出力関係

入力		出力	
x	y	$\overline{x}\cdot\overline{y}$	$\overline{x+y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

素子を組合せて回路を合成するとき，その合成法に制限のない場合もあるが，一般には特殊な制限条件を用いたり，入力にある変換を許す等の条件が加わる場合がある。従って，万能性の問題を論ずるには，合成法を正確に定義し，定義された一つの合成法に従って回路を構成する場合を論じねばならない。後章で論ずるように，この定義の差によって，特定の論理素子集合が可能になったり，ならなかったり，万能性を異にすることがある。

素子 f_1，f_2 ………，f_i，……f_p等の集合Fを

$$\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_i, \cdots\cdots, f_p\}$$

又は

$$\{f_i\}$$

と記す。集合の元は上述の意味で，それぞれ異なっているものとする。従って，Pは集合に含まれる素子の種類の数を表す。

この集合の要素を用いて，定まった合成法（今，仮りにαと名付ける）で合成したとき得られる回路の全体の集合は，一般に有限又は可付番個の要素を持つが，これを合成集合と呼び，

$$[F]_\alpha$$

または，

$$[f_i]_\alpha$$

または，

$$[f_1, f_2, \cdots\cdots, f_i, \cdots\cdots f_p]_\alpha$$

と記す。特に混乱のおそれのない場合はサフィックスαを省略して〔F〕等と記すことにする。

たとえば，２入力アンドと３入力アンドの２つを要素とする集合

$$\{F\}=\{x_1 \cdot x_2,\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\}$$

より合成されるものは

$$[F]=\{x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \cdots\cdots, x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots, x_n; \cdots\cdots\}$$

とn入力のアンド回路（n＝1，2，………n，……）全体である。

今，考慮の対象としている回路のすべてを含む集合（全集合）をKで表すと，一般に

$$[F] \subset K$$

である。特に

$$[F]=K$$

なるようなFを万能な集合と呼ぶ。

万能な集合のうち，集合として極小のもの，つまり，どれか一つの関数を除くと万能とはならぬものを既約万能系，あるいは極小万能集合と呼ぶ。

たとえば，

$$\{\overline{x},\ x+y\}$$

は万能であり，かつ，どちらを除いても非万能となるから，既約万能系である。

一方，

$$\{\overline{x},\ x+y,\ x\cdot y\}$$

は万能系であるが，これから，$x+y$ または $x\cdot y$ を除いてもやはり万能であり，既約ではない。

逆に，万能でない集合のうち，極大のもの，つまり，この集合に属さない任意の要素とこの集合を併せると万能になり，しかもこの集合のみでは万能にならぬものを非万能極大集合と呼ぶ。以下簡単のため，極大集合と略して呼ぶことにする。

また，集合を要素とする集合，すなわち，集合の集合を集合系と呼ぶ。

集合としての結，交をそれぞれ $\cup$，$\cap$ で表わす。

2.4 極大系とそれに基く特性ベクトル

回路の合成法 α と全集合Kが定義された場合，それに対応して次のような条件を満足する集合系Mが有限個の要素集合を持つとき，万能系の問題が一般的に解ける。このことは本章で証明していくが，それに先立ち，極大系の定義を天下り的に与えよう。

定義　2.4.1

全集合Kのなかの有限又は可付番個の要素を持つ部分集合の有限（m）組からなる

$$M_1=\{f_{11},\ f_{12},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

$$M_2=\{f_{21},\ f_{22},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$M_m=\{f_{m1},\ f_{m2},\ \cdots\cdots\cdots\}$$

が次の3条件を満足するとき，このm組の集合系

$$M=\{M_1,\ M_2,\ \cdots\cdots M_m\}$$

は極大系をなすという。

1. M_1，M_2，……M_m のどれにも含まれない集合は万能である。　　（完全律）
2. M_1，M_2，……M_m はそれぞれ非万能である。　　（非万能律）

3. M_1, M_2, ………M_m は互に他を含まない。　　　　　　　　　　　　　(極大律)

M, M_i, f_{ij} の関係を表わすと，集合 M_i は系 M の要素であり，f_{ij} は集合 M_i の要素である。以後，M を系，M_i を M の要素集合，f_{ij} を単に要素と呼び，区別することにする。

極大系の概念の理解を容易にするため，実例をあげて説明する。(この実例の内容については第4章で論ずる。ここでは，形式的に集合とその要素の関係として理解されたい。)

時間要素を考慮しない論理回路の全体を K で表わす。

M_1：合正項関数で表現される回路全体の集合

M_2：背負項関数で表現される回路全体の集合

M_3：自己双対関数で表現される回路全体の集合

M_4：線型関数で表現される回路全体の集合

M_5：単調増大関数で表現される回路全体の集合

の5つの集合は，それぞれ K の部分集合である。この場合，M_1，……，M_5 はそれぞれ可符番無限個の要素を持つ集合である。

$$x_1 \cdot x_2,\quad x_1 + x_2$$

等は集合 M_1 に属する要素である。(後述)

また，集合 M_1，M_2，M_3，M_4，M_5 のそれぞれを要素と考えると，集合を要素とする集合の集合

$$M = \{ M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5 \}$$

を考えることができる。これら

$x_1 \cdot x_2$

M_1

M

の間の関係は第2.4.1表のようになる。

第2.4.1表　集合とその要素の関係

集　　合	要　　素
M	M_1
M_1	$x_1 \cdot x_2$

定義 2.4.1 で定義した極大系は，実はすべての相異なる非万能極大集合である。これを次に証明しよう。

定理　2.4.1

極大系 M_1，M_2，……M_i，……M_m はすべて互に相異なる非万能極大集合であり，この他に極大集合はない。

証　明

定義 2.4.1 の極大律より M_1，M_2，……M_m はそれぞれ相異なる。

定義の非万能律より，これらはすべて非万能である。

M_i に含まれない任意の K の要素を f_k とすると $f_k \cup M_i$ は M_i には含まれない。又，極大律より $M_j \fallingdotseq M_i$ なる M_j に M_i は含まれないので，$f_k \cup M_i$ はすべての M_j に含まれない。従って，完全律より，$f_k \cup M_i$ は万能である。故に M_i は極大集合の定義を満足する。

次に，この M_1，M_2，………，M_i，……M_m 以外に極大集合のないことを証明する。

もし，M_1 ………M_m 以外に極大集合 M_n があったとする。M_n は極大であり，M_1 ………M_m と異なるから，M_1………M_m のどれにも含まれない。従って，完全律より M_n は万能となり仮定に反する。故に M_1 ………M_m 以外に極大集合は存在しない。

（証了）

定理　2.4.2

$[[F]] = [F]$ が成立するような合成法の場合

極大系の要素集合のおのおのに関して，次の関係が成立する。

$$\{M_i\} = [M_i] \qquad (2.4.1)$$

証　明

$$\{M_i\} \subset [M_i]$$

たることは $[M_i]$ が $\{M_i\}$ から合成されるということから明らかである。

$$[M_i] \supset f \quad 且つ \{M_i\} \not\supset f$$

なる f が存在したとする。Mi が極大だから

$$f \cup \{M_i\}$$

は万能である。従って $[M_i]$ は万能となり，極大系の非万能律に反する。従ってこのような f は存在しない。故に

$$\{M_i\} = [M_i]$$

（証　了）

極大集合はそれ自身，合成法αに関して閉じているから，

$$M_i = \{ f_i, \cdots\cdots\cdots \}$$

より，αで合成される集合はやはりM_iの要素である。

Kの上でのM_iの余集合を$\overline{M_i}$にて表す。一般にKの要素は$M_i \cdots\cdots M_m$の各々について極大集合に含まれるか，その余集合に含まれるかで2^m個の類に分類し得る。（実際には2^m個中に空集合があることもある。）この分類を極大系による分類（又は類別）と呼ぶ。

この各類A_k又はその要素の性格を表現するため，次のように特性ベクトルを定義する。

定義　2.4.2

類A_kの特性ベクトル

$$A_k : (a_{k1}, a_{k2}, \cdots\cdots\cdots a_{ki}, \cdots\cdots\cdots a_{km})$$

の各成分a_{ki}の値はそれぞれ，A_kが極大集合M_iに含まれるとき0，余集合$\overline{M_i}$に含まれるとき1をとる。

特に（1 1 ………1）すなわち，すべての成分が1なるベクトルをI，（0 0 ……0）すなわち，すべての成分が0なるベクトルを0にて表わす。

極大系の完全律から容易に分るようにIなる特性ベクトルを持つ要素はそれ自身で万能である。

特性ベクトル間には次のような半順序関係がある。

$i = 1 \cdots\cdots m$のすべてに対して

$$a_{ki} \geqq a_{li}$$

が成立するとき，$A_k : (a_{k1}, \cdots\cdots a_{ki}, \cdots\cdots a_{km})$は$A_l : (a_{l1}, \cdots\cdots a_{li}, \cdots\cdots a_{lm})$より大きいと呼ぶ。

容易に分るように

$$A_k \geqq A_l,\ A_l \geqq A_m$$

なら

$$A_k \geqq A_m$$

後に，定理2.6.3で判るように，この特性ベクトルの大小関係は，万能性の強さの大小関係でもある。つまり，2つの要素a，bがあって，aと組合せて万能となるものが，bと組合せて万能となるものをすべて含むとき，aはbより万能性が強いと定義すれば，この強さの関係は特性ベクトルの大小関係と一致する。

2.5　万能性に関する同値類

論理素子の万能性を論ずるためには，これと組合せて万能となる相手の範囲が何かを規準として論ずる。ある論理素子が任意の論理素子集合の要素として含まれているとき，その要素を他の要素で置換しても常に万能性が変化しない。つまり，万能なものは万能，非万能なものは非万能であるような要素同志を万能性に関して同値と定義し，これによって素子を分類する。この同値性は次のように定義できる。

定義　2.5.1

Kに属する2つの要素f_1，f_2が，すべてのKの部分集合Fに対して

1）$f_1 \cup F$が万能なら，$f_2 \cup F$も万能であり，

2）$f_1 \cup F$が非万能なら，$f_2 \cup F$も非万能である。

とき，f_1とf_2とは万能性に関して同値であると呼ぶ。

以下混同のおそれがない限り，単に同値という名で，この性質を呼ぶことにする。上の関係は同値関係の条件を満足するから，これを使ってKの元を類別できる。

定義からただちに得られる二，三の定理を次に述べる。

定理　2.5.1

既約万能系の2つ以上の構成要素が1つの類中に含まれることはない。

証　明

既約万能系Fの元のうち，任意の2つを撰んでf_1，f_2とする。Fからf_1を除いた部分集合F_1は既約万能系の定義より非万能である。したがって，$f_2 \cup F_1 = F_1$は非万能，$f_1 \cup F_1 = F$は万能となり，f_1とf_2は同値でなく，同じ類には属さない。

定理　2.5.2

万能系の任意の構成要素をそれぞれ，これと同値な他の要素に置き換えて得られる集合もまた万能系である。

証　明

f_1，f_2，f_3………f_pが万能系であったとする。各fにそれぞれ同値な要素をとって，g_1，g_2，g_3………g_pという系を考える。

定義2.5.1よりf_1，f_2，f_3………f_pが万能なら，g_1，f_2，f_3……f_pは万能，g_1，f_2，f_3………f_pが万能なら，g_1，g_2，f_3，………f_pが万能である。これを繰返して，g_1，g_2，g_3………g_pは万能である。

（証　了）

系　1

既約万能系の任意の構成要素をそれぞれこれと同値な他の要素で置き換えて得られる集合もまた既約万能系である。

証　明

定理 2.5.2 より共に万能である。真部分集合を比較すると定理と同じ論法で，次に非万能なることが言えるから，既約万能系である。

（証　了）

これらの定理からわかるように，構成要素が互いに同値な系は同じ性質を有するので，上のような類別が得られれば，個々の要素についてではなく，類として一般的に論ずることができ，その性質は類から任意の代表元をとって得た系に適用できる。

定義 2.5.1 は万能そのものの本質から同値性を定義したものであるが，具体的な類別をしたときに，それが，定義 2.5.1 の条件を満足しているか否かを直接検証するには無限のステップを要し，実際的ではない。そこで，これと等価で，且つ検証が容易な類別法を導くことが，万能性の問題を解決するのに重要である。実は前節で論じた極大系による類別がこれと等価であることを，次のように証明できるのである。これによって，万能性の問題が容易に解けるようになる。

定理　2.5.3

極大系による類別は万能性に関する同値性による類別と一致する。

証　明

これを証明するためには極大系による類別で同一類に属する任意の二つの元が同値で，異なる類に属するものは同値でないことを示せばよい。

いま，Kの二つの元 f_1 と f_2 が同一類に属していたとする。その類を

$$M_{i_1} \cap \cdots\cdots M_{i_j} \cap \overline{M}_{i_{j+1}} \cap \cdots\cdots \cap \overline{M}_{i_m}$$

とする。いま，Kの任意の部分集合Fを撰んだとき，Fは M_{i_1} ～ M_{i_j} のいずれか一つに含まれるか，いずれにも含まれないかである。前者であれば，定義 2.4.1 の条件 2 より，$f_1 \cup F$，$f_2 \cup F$ は共に非万能である。後者であれば，f_1，f_2 は共に $M_{i_{j+1}}$ ～ M_{i_m} のいずれにも含まれない。又，Fは M_{i_1} ～ M_{i_j} のいずれにも含まれないので，$f_1 \cup F$，$f_2 \cup F$ は M_{i_1} ～ M_{i_m} のいずれにも含まれない。従って，定義 2.4.1 の条件 1 より，共に万能である。故に，定義 2.5.1 より f_1 と f_2 は同値である。

一方，f_1 と f_2 が異なる類に属しているとすると片方を含み，片方を含まぬような極大集合が少なくとも一つある。これを M_i とする。いま，f_1 側が M_i に含まれるとすると

$f_1 \cup M_i = M_i$

で非万能である。f_2 はM_i に含まれないから，M_iが極大なることにより，$f_2 \cup M_i$ は万能である。従って定義 2.5.1 の条件が満足されず，f_1 と f_2 は同値でない。

（証　了）

この定理によって，極大系による類別を行なったものに，万能性による同値性による類別の場合に成立した性質，定理 2.5.1，定理 2.5.2 等が適用できることが明らかとなった。

同値類の個数に関して，極大系による類別と数が等しいことから，次の定理を得る。

定理　2.5.4

万能性に関する同値類の個数は，

2^m

より多くない。

極大系による類別を行なった場合に，実際には空な類がある。空でない類を特性ベクトルの大きさの順に番号をつけて並べた表を同値類表と呼ぶことにする。たとえば，表 2.5.1 にその例を示す。

表 2.5.1　同値類表

番　号	類の特性ベクトル
1	(1 1 1 1 1)
2	(1 1 0 1 1)
3	(1 0 1 1 1)
4	(0 1 1 1 1)
5	(1 1 0 0 1)
6	(1 0 1 0 1)
7	(0 1 1 0 1)
8	(0 0 1 1 1)
9	(1 0 1 0 0)
10	(0 1 1 0 0)
11	(0 0 1 1 0)
12	(0 0 0 1 1)
13	(0 0 0 1 0)
14	(0 0 0 0 1)
15	(0 0 0 0 0)

2.6　集合の同値性と集合の結に対応する特性ベクトル演算

前節ではＫの元相互間の同値性について述べた。本節ではこの概念をＫの部分集合に迄拡張しよう。

定義　2.6.1

Ｋの２つの部分集合F_1とF_2がＫの任意の部分集合Ｆに対して

1）$F_1 \cup F$が万能なら，$F_2 \cup F$も万能であり，

2）$F_1 \cup F$が非万能なら，$F_2 \cup F$も非万能である。

とき，F_1とF_2は万能性に関して同値であると呼ぶ。

この定義によれば，万能系とは全集合Ｋと同値な集合と言える。

2.4節において，要素又は同値類の特性ベクトルを定義したが，これを一般の集合に迄拡張する。まず，その準備として，特性ベクトル間の演算を次のように定義する。

定義　2.6.2

２つの特性ベクトル

$A_k : (a_{k1}, \cdots\cdots, a_{ki}, \cdots\cdots a_{km})$

$A_l : (a_{l1}, \cdots\cdots, a_{li}, \cdots\cdots a_{lm})$

の論理和は各成分の論理和

$A_k \vee A_l : (a_{k1} \vee a_{l1}, \cdots\cdots, a_{ki} \vee a_{li}, \cdots\cdots a_{km} \vee a_{lm})$

にて定義する。

定義　2.6.3

２つの特性ベクトル

$A_k : (a_{k1}, \cdots\cdots, a_{k1}, \cdots\cdots a_{km})$

$A_l : (a_{l1}, \cdots\cdots, a_{l1}, \cdots\cdots a_{lm})$

の論理積は各成分の論理積

$A_k \wedge A_l : (a_{k1} \wedge a_{l1}, \cdots\cdots, a_{ki} \wedge a_{li}, \cdots\cdots a_{km} \wedge a_{lm})$

にて定義する。

定義　2.6.4

特性ベクトル

$A_k : (a_{k1}, \cdots\cdots, a_{ki}, \cdots\cdots a_{km})$

の否定は各成分の否定

$\overline{A}_k : (\overline{a}_{k1}, \cdots\cdots, \overline{a}_{ki}, \cdots\cdots a_{km})$

にて定義する。

これを用いて，集合の特性ベクトルを定義する。

定義　2.6.5

Kの部分集合F $\{f_1, f_2, \cdots\cdots f_j \cdots\cdots\}$ の各要素の特性ベクトルが $A_1, A_2 \cdots\cdots A_j \cdots$ なるとき，Fの特性ベクトルを各要素の特性ベクトルの論理和

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots\cdots\cdots \vee A_j \vee \cdots\cdots$$

にて定義する。

この定義によれば，集合としての和集合が特性ベクトルの論理和に対応する。ここで，先に定義した集合の同値性と特性ベクトルとの関係の定理を導き，定義 2.6.5 の物理的意味を明らかにする。

定理　2.6.1

Kの２つの部分集合 F_1，F_2 はその特性ベクトルが等しいとき，且つそのときに限り，同値である。

証　明

F_1，F_2 の特性ベクトルが等しいとする。その成分は一般性を失うことなく，

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots\cdots\cdots = a_i = 0$$

$$a_{i+1} = a_{i+2} = \cdots\cdots = a_m = 1$$

とおける。このとき，

$$F_1, F_2 \subset M_1 ; F_1, F_2 \subset M_2 ; \cdots\cdots F_1, F_2 \subset M_i$$

$$F_1, F_2 \not\subset M_{i+1} ; F_1, F_2 \not\subset M_{i+2} ; \cdots\cdots F_1, F_2 \not\subset M_m$$

今，Kの任意の部分集合Fを撰ぶと，これは $M_1 \sim M_i$ のいずれか一つに含まれるか，いずれにも含まれぬかである。前者であれば，定義 2.4.1 の条件２より，$F_1 \cup F$，$F_2 \cup F$ は共に非万能である。後者であれば，$F_1 \cup F$，$F_2 \cup F$ は共に $M_1 \sim M_m$ のいずれにも含まれないので，定義 2.4.1 の条件１より共に万能である。従って F_1 と F_2 は同値である。

次に，特性ベクトルの第 i 番目の成分が異なっていたとする。一般性を失うことなく，F_1 の i 番目が０で，F_2 の i 番目を１とする。このとき

$$F_1 \subset M_i \qquad F_2 \not\subset M_i$$

であるから，

$$F_1 \cup M_i \subset M_i$$

で，$F_1 \cup M_i$ は非万能である。

$$F_2 \cup M_i$$

はM_iが極大集合たることから万能である。従って，F_1とF_2は同値でない。故にF_1とF_2の特性ベクトルが等しいときに限り同値である。（証　了）

定義2.6.5と定理2.6.1より，容易に次の重要な定理を得る。

定理　2.6.2

Kの部分集合Fは，その要素の特性ベクトルの論理和がIに等しいとき，そのときに限り万能である。

証　明

K自身はどの極大集合にも含まれぬので，$a_i=1$であるような特性ベクトルを持つ要素を含む。従って定義2.6.5よりK自身の特性ベクトルは

$I:(1\ 1\cdots\cdots 1)$

である。これと定理2.6.1より，Fの特性ベクトルがIに等しいとき，そのときに限り，Kと同値となり万能である。（証　了）

この定理によって，集合の万能性を検証するには，集合の各要素の特性ベクトルを求め，全体の論理和をとり，Iとなるか否から調べればよい。

ある集合が万能でないとき，その特性ベクトルをAとすると，

$A\vee\overline{A}=I$

であるから，これに$\overline{A}$又はそれより大きい特性ベクトルを持つ集合を追加すると万能になることがわかる。次の定理は非万能な集合に何を追加すると万能になるかを求めるのに有用である。

定理　2.6.3

非万能な集合Fの特性ベクトルをAとする。

$$B\geqq\overline{A} \qquad (2.6.1)$$

なる特性ベクトルBを有する集合Gを追加することにより，$F\cup G$は万能となる。

証　明

$F\cup G$の特性ベクトルは

$A\vee B\geqq A\vee\overline{A}=I$

したがって，$F\cup G$は万能である。（証　了）

2.7　既約万能系の導出法

既約万能系の定義は既に2.3節で述べた。これと極大系との間に次のような関係がある。

定理　2.7.1

集合Fが既約万能系であるための必要充分条件はFが極大系のどのM_iにも含まれてなく，かつ，Fの真部分集合が存在すれば，少なくとも一つのM_iに含まれていることである。

証　明

FがどのM_iにも含まれないという条件は，定義2.4.1の条件2より必要である。

もし，真部分集合GがどのM_iにも含まれないとすると，定義2.4.1の条件1より，Gは万能となり，Fは既約でなくなるから，この条件も必要である。

逆にどの真部分集合も，それぞれ，どれか一つのM_iに含まれていれば，非万能であり，一方F自身がどのM_iにも含まれないなら万能であり，Fは既約万能系である。ゆえに，この条件は充分である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

定理2.5.1，定理2.5.2並びにその系等より，既約万能系を求めるのに，個々の要素の代りに，それが属する類を用いてよいことが判っているので，本節では類とその代表とを特に区別しない。類で成立することはその代表元でも成立する。その逆もまた真である。

類の組合せをとって，各類から，一つづつ代表元を出し，既約万能系となるような類の組合せを既約万能系と呼ぶ。しかし，上記理由で，類と代表元を特に区別する必要がないので，以後特に区別するとき以外はこれもまた既約万能系と呼ぶことにする。

特性ベクトルを用いて，定理2.7.1を言い換えると次の定理を得る。

定理　2.7.2

類の組合せ，A_1，A_2，……，A_k，…A_pが既約万能系なるための必要充分条件は

1）$\bigvee_{j=1}^{p} A_j = I$　　　　　（2.7.1）

かつ，

2）$\bigvee_{j \neq k} A_j \neq I \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots p)$　　　　　（2.7.2）

である。

この定理と定理2.6.3から，たゞちに次の系を得る。

系　1

類の組合せA_1，A_2……A_k，A_p（$p \geqq 2$）が既約万能系なら，

$$I > A_k \geqq \overline{\bigvee_{j \neq k} A_j} \qquad (2.7.3)$$

また，定理2.7.2の2)と系1からたゞちに次の系を得る。

系　2

既約万能系の類A_kはp≧2のとき

$$a_{ki}=1,\quad a_{ji}=0\qquad (j\neq k)\qquad (2.7.4)$$

であるようなa_{ki}を少なくとも1つ含まねばならない。

特性ベクトルA_kのなかに含まれる1の数をA_kの重さと呼び，$\omega(A_k)$と記すことにする。たとえば，（01010）は1の数が2だから，重さ2である。

定理　2.7.3

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_k,\ \cdots\cdots A_p \leqq m+1-p\qquad (2.7.5)$$

である。但し，mは極大集合の数である。

証　明

もし，$\omega(A_k)>m+1-p$なるA_kが存在したとする。A_k以外のp－1個で何らか新しいa_iが1となることが，前定理系2より必要である。したがって

$$\omega\left(\bigvee_{j=1}^{p} A_j\right) > (m+1-p)+(p-1)=m$$

でなければならず，重さはベクトルの成分の数より大きくなり得ないから，これは不可能である。故に定理が成立する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

定理　2.7.4

既約万能系の要素の数pは極大集合の数mより多くはない。

証　明

定理2.7.2の系2より，一つの要素ごとに少なくとも一つ新しいa_iが1となる。従って，pはmより多くはない。

以上の定理及び系を用いて，既約万能系を組織的に求める手順が得られる。

まず，既約万能系の特性ベクトルの大きい順に並べ，1………nと番号を付す。

$$n\leqq 2^m$$

探索手順は次の通りである。

p＝1からp＝m迄，p個のあらゆる組合せについて，定理2.7.2の条件1）2）に適合するか否かを調べ，適合したものが既約万能系である。

実際には，この手順の探索回数を少なくするため，大きい順から組織的に組合せを作り，（2.7.2）式の論理和を部分的に求めてゆき，Iに等しいものが存在すれば，その部分的組合せは飛ばせて次に進む。

上記手法を用いれば，有限回の操作で，すべての組合せを尽せるから，定義2.6.1の意

味で異なるすべての既約万能系が求まり，これ以外に同値な既約万能系がないことが判かる。

2.8 万能性を論ずる一般的手法

本章の所論によって，合成法と万能性が定義された対象において，万能性を論ずるための手法が次のように確立した。

1. 適当な集合の組合せを洞察によって求める。
2. この集合の組合せが極大系の3条件を満足することを証明する。
3. 極大系により，分類をする。この際，空集合を除く。同時に各類の特性ベクトルが定まる。
4. 既約万能系を前節の手順で求める。

第四章，第五章，第六章では具体的にこの手法を適用する。なお，特性ベクトルは，定理2.6.3を適用することにより，非万能集合と組合せて万能となる集合を求めるのに応用される。

2.9 結　論

以上，論理回路の万能系の問題を解く場合，合成法や万能の定義にとらわれない一般理論と手順を与えた。

§2.4で万能系の必要充分条件を与える極大系なる概念を導入し，それを定義づける3条件を示した。又，これによる分類と特性ベクトルを定義した。一方，§2.5では万能そのものより同値性を定義し，これによる分類と極大系による分類とが一致することを示し，万能系の問題を特性ベクトルを用いて代数的に扱えることを示した。この結果，§2.6で，非万能集合と組合せて万能となる集合を求める代数的手段を示した。また，§2.7では本質的に異なるすべての既約万能系を組織的に求める手順を示した。

本章の成果によって，合成法と万能が定義された具体的な系において極大系が洞察によって求まれば，万能系の問題が完全に解けることになった。その一般的手法を§2.8で述べた。

なお，本章の所論の論旨より判るように，本章の結果は論理回路，論理関数に限定せず，一般の場合にも適用できる。

本章の内容の一部は文献〔5〕〔7〕〔11〕に発表されている。

第三章　論理関数集合とその諸性質

3.1　緒　　論

論理回路の万能系の問題を具体的に論ずるに先立ち，第四章以下で用いる定理を導くに必要な二値論理関数の基本的性質を述べておく。また，第四章以下で，極大系の要素集合として用いる関数集合の性質を明らかにしておく。これらの関数集合中，筆者が新たに定義した集合以外の名前は慣習に従った。

3.2　論理関数の展開形と最小項

一般に，二値論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_N)$ は

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_N)$$
$$= \bigvee_{i=0}^{2^N-1} f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots\cdots \alpha_{iN}) \bigwedge_{S=1}^{N} (\alpha_{iS} \oplus \overline{x}_S) \qquad (3.2.1)$$

または

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_N)$$
$$= \alpha_0 \oplus \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \oplus \sum_{\substack{i<j \\ i=1}}^{i=N-1} \alpha_{ij} x_i x_j$$
$$\oplus \cdots\cdots\cdots \oplus \alpha_{12\cdots N}\, x_1 x_2 \cdots\cdots x_N \qquad (3.2.2)$$

と展開できる。[14]　ただし，$\oplus$は２を法とする和，Σは$\oplus$の意味の総和，α_{ij} 等は０または１の値をとる常数である。

（3.2.1）は加法主標準型，（3.2.2）は排他的論理和による展開と呼ぶ。

加法主標準型の各項を最小項と呼ぶ。

一般に最小項

$$m = \bigwedge_{S=1}^{N} (\alpha_S \oplus \overline{x}_S) \qquad (3.2.3)$$

（α_Sは０または１の常数）

に対して，補最小項m^cとは

$$m^{c} = \bigwedge_{S=1}^{N} (\overline{\alpha}_S \oplus \overline{x}_S) \tag{3.2.4}$$

であると定義する。

互に補な最小項mとm^{c}を1組として共軛項と呼ぶ。

その係数に着目して，

$$f(\alpha_{i_1} \cdots\cdots \alpha_{i_N}) = f(\overline{\alpha}_{i_1} \cdots\cdots \overline{\alpha}_{i_N}) = 0 \tag{3.2.5}$$

なるとき，無共軛項と呼ぶ。

$$f(\alpha_{i_1} \cdots\cdots \alpha_{i_N}) \neq f(\overline{\alpha}_{i_1} \cdots\cdots \overline{\alpha}_{i_N}) \tag{3.2.6}$$

なるとき，片共軛項と呼ぶ。

$$f(\alpha_{i_1} \cdots\cdots \alpha_{i_N}) = f(\overline{\alpha}_{i_1} \cdots\cdots \overline{\alpha}_{i_N}) = 1 \tag{3.2.7}$$

なるとき，両共軛項と呼ぶ。

特に，

$$\alpha_{i_1} = \cdots\cdots\cdots = \alpha_{i_N} = 1 \tag{3.2.8}$$

なる最小項m_0を正項と呼ぶ。

$$\overline{\alpha}_{i_1} = \cdots\cdots\cdots = \overline{\alpha}_{i_N} = 0 \tag{3.2.9}$$

なる最小項m_0^cを負項と呼ぶ。

加法主標準型中のある最小項の係数が1のとき，この関数はその最小項を含むと呼び，係数が0のとき，含まないと呼ぶ。

3.3 部分関数の定義

定義　3.3.1

論理関数の一部に1を代入して得られる関数を，その関数の真の1－部分関数と呼ぶ。また，もとの関数自身も含めて，1－部分関数と呼ぶ。

定義　3.3.2

論理関数の一部に0を代入して得られる関数を，その関数の真の0－部分関数と呼ぶ。また，もとの関数自身も含めて，0－部分関数と呼ぶ。

例　$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3$ の1－部分関数は

$x_1 \equiv 1$	$f(1, x_2, x_3) \equiv x_2$
$x_2 \equiv 1$	$f(x_1, 1, x_3) \equiv x_1 + \overline{x}_3$
$x_3 \equiv 1$	$f(x_1, x_2, 1) \equiv x_1 x_2$
$x_1 \equiv x_2 \equiv 1$	$f(1, 1, x_3) \equiv 1$

$x_2 = x_3 \equiv 1$ $\quad\quad f(x_1, 1, 1) \equiv x_1$

$x_3 = x_1 \equiv 1$ $\quad\quad f(1, x_2, 1) \equiv x_2$

$x_1 = x_2 = x_3 \equiv 1$ $\quad\quad f(1, 1, 1) \equiv 1$

また，真の0ー部分関数は

$x_1 \equiv 0$ $\quad\quad f(0, x_2, x_3) \equiv x_2 \overline{x_3}$

$x_2 \equiv 0$ $\quad\quad f(x_1, 0, x_3) \equiv 0$

$x_3 \equiv 0$ $\quad\quad f(x_1, x_2, 0) \equiv x_2$

$x_1 = x_2 \equiv 0$ $\quad\quad f(0, 0, x_3) \equiv 0$

$x_2 = x_3 \equiv 0$ $\quad\quad f(x_1, 0, 0) \equiv 0$

$x_3 = x_1 \equiv 0$ $\quad\quad f(0, x_2, 0) \equiv x_2$

$x_1 = x_2 = x_3 \equiv 0$ $\quad\quad f(0, 0, 0) \equiv 0$

3.4 含正項関数の性質

定義 3.4.1

すべての変数が1のとき，関数値が1である関数，つまり，

$$f(1, \cdots\cdots 1) = 1 \tag{3.4.1}$$

なる関数を含正項関数と呼ぶ。

定義と（3.2.8）より，たゞちに次の定理を得る。

定理 3.4.1

含正項関数を加法主標準型で展開すれば，式中に正項

$$m_0 = \bigwedge_{S=1}^{N} x_S \tag{3.4.2}$$

が存在する。その逆も成立する。

含正項関数は次のような性質をもつ。

定理 3.4.2

含正項関数の変数に含正項関数を代入して得られる関数は，含正項関数である。

証 明

含正項関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数に含正項関数 $g_1(x_1, \cdots x_N)$，$g_2(x_1, \cdots x_N)$ $\cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

ここで

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_N = 1 \tag{3.4.3}$$

とおくと，定義 3.4.1 より

$$g_1(1\cdots\cdots 1)=g_2(1\cdots\cdots 1)=\cdots\cdots=g_t(1\cdots\cdots 1)=1 \qquad (3.4.4)$$

従って

$$y_1=y_2=\cdots\cdots=y_t=1 \qquad (3.4.5)$$

となり，

$$f(1,\ 1,\ \cdots\cdots 1)=1 \qquad (3.4.6)$$

故に

$$f\{g_1(x_1\cdots\cdots x_N),\ g_2(x_1\cdots\cdots x_N),\ \cdots\cdots,\ g_t(x_1\cdots\cdots x_N)\}$$

は含正項関数である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

3.5 背負項関数の性質

定義　3.5.1

すべての変数が0のとき，関数値が0である関数，つまり

$$f(0,\ \cdots\cdots 0)=0 \qquad (3.5.1)$$

なる関数を背負項関数と呼ぶ。

定義と（3.2.9）より，ただちに次の定理を得る。

定理　3.5.1

背負項関数を加法標準型で展開すれば，式中に負項

$$m_0^c=\bigwedge_{S=1}^{N}\overline{x}_S \qquad (3.5.2)$$

が存在しない。その逆も成立する。

背負項関数は次のような性質をもつ。

定理　3.5.2

背負項関数の変数に背負項関数を代入して得られる関数は背負項関数である。

証　明

背負項関数 $f(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots y_t)$ の変数に背負項関数 $g_1(x_1,\cdots x_N)$，$g_2(x_1,\cdots x_N)$ $\cdots\cdots g_t(x_1,\ \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

ここで

$$x_1=x_2=\cdots\cdots\cdots=x_N=0 \qquad (3.5.3)$$

とおくと，定義 3.5.1 より

$$g_1(0\cdots\cdots 0)=g_2(0\cdots\cdots 0)=\cdots\cdots=g_t(0\cdots\cdots 0)=0 \qquad (3.5.4)$$

従って

$$y_1 = y_2 = \cdots\cdots = y_t = 0 \qquad (3.5.5)$$

となり，

$$f(0,\ 0,\cdots\cdots 0) = 0 \qquad (3.5.6)$$

故に

$$f\{g_1(x_1\cdots\cdots x_N),\ g_2(x_1\cdots\cdots x_N)\cdots\cdots g_t(x_1\cdots\cdots x_N)\}$$

は背負項関数である。　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

3.6　背正項含負項関数の性質

定義　3.6.1

すべての変数が0のとき，関数値が1で，すべての変数が1のとき，関数値が0なる関数，すなわち，

$$f(1,\ \cdots\cdots 1) = 0 \qquad (3.6.1)$$

かつ，$f(0,\ \cdots\cdots 0) = 1$

なる関数を背正項含負項関数と呼ぶ。

定義と（3.2.8）（3.2.9）より，ただちに次の定理を得る。

定理　3.6.1

背正項含項関数を加法主標準型で展開すれば，式中に正項は存在せず，負項は存在する。その逆も成立する。

4節，5節並びに本節で定義した含正項関数，背負項関数，背正項含負項関数の間の関係を明らかにする。

定理　3.6.2

背正項含負項関数は含正項関数でなく，かつ背負項関数でない。その逆も成立する。

証　明

定理3.6.1より背正項含負項関数を加法主標準型に展開すれば，正項がなく負項がある。従って，定理3.4.1より，含正項関数でない。また，定理3.5.1より背負項関数でない。　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

定理　3.6.3

背正項含負項関数の変数のすべてに背正項含負項関数を代入して得られる関数は含正項且つ背負項関数である。

証 明

背正項含負項関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数すべてに背正項含負項関数 $g_1(x_1 \cdots x_N)$, $g_2(x_1 \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

ここで

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_N = 1 \qquad (3.6.2)$$

とおくと，定義 3.6.1 より

$$g_1(1 \cdots\cdots 1) = g_2(1 \cdots\cdot 1) = \cdots\cdots = g_t(1 \cdots\cdots 1) = 0 \qquad (3.6.3)$$

従って

$$y_1 = y_2 = \cdots\cdots\cdots = y_t = 0 \qquad (3.6.4)$$

となり，再び定義 3.6.1 より

$$f(0, 0, \cdots\cdots, 0) = 1 \qquad (3.6.5)$$

故に

$$f\{g_1(x_1 \cdots\cdots x_N), g_2(x_1 \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)\}$$

は定義 3.4.1 より含正項関数である。

一方，

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots\cdots = x_N = 0 \qquad (3.6.6)$$

とおくと，定義 3.6.1 より

$$g_1(0 \cdots\cdots 0) = g_2(0 \cdots\cdots 0) = \cdots\cdots g_t(0 \cdots\cdots 0) = 1 \qquad (3.6.7)$$

従って

$$y_1 = y_2 = \cdots\cdots\cdots = y_t = 1 \qquad (3.6.8)$$

となり，再び，定義 3.6.1 より

$$f(1, 1, \cdots\cdots 1) = 0 \qquad (3.6.9)$$

故に

$$f\{g_1(x_1 \cdots\cdots x_N), g_2(x_1 \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)\}$$

は定義 3.5.1 より背負項関数である。 (証 了)

定理 3.6.4

含正項且つ背負項関数の変数のすべてに背正項含負項関数を代入して得られる関数は，背正項含負項関数である。

証 明

含正項且つ背負項関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数のすべてに背正項含負項関数 $g_1(x_1 \cdots\cdots x_N)$, $g_2(x_1 \cdots\cdots x_N)$, ……, $g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

こゝで

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_N = 1 \qquad (3.6.10)$$

とおくと，定義 3.6.1 より

$$g_1(1\cdots\cdots1) = g_2(1\cdots\cdots1) = \cdots\cdots = g_t(1\cdots\cdots1) = 0 \qquad (3.6.11)$$

従って，

$$y_1 = y_2 = \cdots\cdots = y_t = 0 \qquad (3.6.12)$$

となり，定義 3.5.1 より

$$f(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0) = 0 \qquad (3.6.13)$$

また一方，

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_N = 0 \qquad (3.6.14)$$

とおくと，定義 3.6.1 より

$$g_1(0\cdots\cdots0) = g_2(0\cdots\cdots0) = \cdots\cdots = g_t(0\cdots\cdots0) = 1 \qquad (3.6.15)$$

従って，

$$y_1 = y_1 = \cdots\cdots = y_t = 1 \qquad (3.6.16)$$

となり，定義 3.4.1 より

$$f(1,\ 1,\ \cdots\cdots 1) = 1 \qquad (3.6.17)$$

故に

$$f\{g_1(x_1\cdots\cdots x_N),\ g_2(x_1\cdots\cdots x_N)\cdots\cdots g_t(x_1\cdots\cdots x_N)\}$$

は（3.6.13）と（3.6.17）を定義 3.6.1 に適用して，背正項含負項関数である。

背正項含負項関数の変数に背正項含負項関数を代入することを繰返し適用すると奇数段目が背正項含負項関数，偶数段目が含正項且つ背負項関数になることが，定理 3.6.3 と定理 3.6.4 より判る。これは遅れを伴う論理回路の万能性を論ずる際に有用な性質である。

3.7 自己双対関数の性質

定義 3.7.1

各変数の否定の関数の否定が関数値に等しいような論理関数，すなわち，

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_N) = \overline{f}(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \cdots\cdots \overline{x}_N) \qquad (3.7.1)$$

なる関数を自己双対関数と呼ぶ。

双対そのものより定義するのが普通だが，この定義と等価なことが一般に知られている。

定義 3.7.1 と（3.2.6）より，次の定理を得る。

定理　3.7.1

自己双対関数の共軛項はすべて片共軛項である。その逆も成立する。

自己双対関数はまた次の性質を持つことが知られている。[14]

定理　3.7.2

自己双対関数の変数に自己双対関数を代入して得られる関数は，自己双対関数である。

3.8　単調増大関数の性質

定義　3.8.1

$x_S \geqq \xi_S$ ($S = 1 \cdots\cdots N$)ならば

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \geqq f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N) \qquad (3.8.1)$$

なるとき，fは単調増大関数であると呼ぶ。

単調増大関数に関して，次のような性質が知られている。[14]

定理　3.8.1

単調増大関数を任意の変数 x_S について展開して

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots, x_N) \\ & = x_S \cdot g_S(x_1, \cdots\cdots, x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots, x_N) \\ & \quad + \bar{x}_S h_S(x_1, \cdots\cdots, x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots, x_N) \end{aligned} \qquad (3.8.2)$$

とおけば，($N-1$)変数 $x_1, \cdots\cdots, x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N$ のすべての組合せに対して

$$\begin{aligned} & g_S(x_1, \cdots\cdots, x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots, x_N) \\ & \geqq h_S(x_1, \cdots\cdots, x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N) \end{aligned} \qquad (3.8.3)$$

が成立する。その逆も成立する。

証　明

fは単調増大関数であるから，(3.8.1)より

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, 1, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N) \\ & \geqq f(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, 0, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N) \end{aligned} \qquad (3.8.4)$$

一方，(3.8.2)の両辺に

$x_S = 1$

を代入すると

$$\begin{aligned} & f(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, 0, x_{S+1} \cdots\cdots x_N) \\ & = 1 \cdot g_S(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N) \\ & \quad + 0 \cdot h_S(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N) \end{aligned}$$

$$= g_S(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1} \cdots\cdots\cdots x_N) \qquad (3.8.5)$$

又，(3.8.2)の両辺に

$$x_S = 0$$

を代入すると，

$$f(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, 0, x_{S+1} \cdots\cdots\cdots x_N)$$

$$= 0 \cdot g_S(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N)$$

$$+ 1 \cdot h_S(x_1, \cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1}, \cdots\cdots x_N)$$

$$= h_S(x_1, \cdots\cdots\cdots x_{S-1}, x_{S+1} \cdots\cdots x_N) \qquad (3.8.6)$$

(3.8.5)(3.8.6)を(3.8.4)に代入して(3.8.3)を得る。

逆に，すべての変数の組合せに対して，(3.8.3)が成立するならば，(3.8.5)と(3.8.6)より(3.8.4)が成立する。(3.8.4)が任意のx_Sについて成立するから，(3.8.1)の

$$x_S > \xi_S$$

を満足する変数について，一つづつ(3.8.4)の関係を繰返し適用すれば，

$$f(x_1, \cdots\cdots x_S, \cdots\cdots x_N)$$

$$\geqq f(\xi_1, \cdots\cdots \xi_S, \cdots\cdots \xi_N) \qquad (3.8.7)$$

を得る。従って定義3.8.1よりfは単調増大関数である。　　（証　了）

定理　3.8.2

単調増大関数の変数に単調増大関数を代入して得られる関数は単調増大関数である。

証　明

単調増大関数$f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$の変数に単調増大関数$g_1(x_1, \cdots\cdots x_N)$，$g_2(x_1, \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots$，$g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)$を代入する。

$$x_S \geqq \xi_S \qquad S = 1 \cdots\cdots N \qquad (3.8.8)$$

なら，定義3.8.1より

$$g_1(x_1, \cdots\cdots, x_N) \geqq g_1(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N)$$

$$g_2(x_1, \cdots\cdots, x_N) \geqq g_2(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_t(x_1, \cdots\cdots, x_N) \geqq g_t(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N)$$

$$(3.8.9)$$

これより

$$f\{g_1(x_1, \cdots\cdots, x_N), g_2(x_1, \cdots\cdots, x_N), \cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots, x_N)\}$$

$$\geqq f\{g_1(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N), g_2(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N), \cdots\cdots, g_t(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_N)\}$$

(3.8.10)

従って，(3.8.8)と(3.8.10)より，定義3.8.1の条件を満足するので，

$$f\{g_1(x_1, \cdots\cdots, x_N), g_2(x_1, \cdots\cdots, x_N), \cdots\cdots, g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)\}$$

は単調増大関数である。 (証　了)

3.9 単調減少関数の性質

定義　3.9.1

$x_S \geqq \xi_S$ 　(S＝1……N)ならば

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N) \qquad (3.9.1)$$

なるとき，fは単調減少関数であると呼ぶ。

単調増大関数と単調減少関数との間の関係について二，三の性質を，次に明らかにする。

定理　3.9.1

単調減少関数のすべての変数に単調減少関数を代入して得られる関数は単調増大関数である。

証　明

単調減少関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数に単調減少関数 $g_1(x_1, \cdots\cdots x_N)$, $g_2(x_1, \cdots\cdots x_N)$ …… $g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

$$x_S \geqq \xi_S \qquad S=1\cdots\cdots N \qquad (3.9.2)$$

なら，定義3.9.1より

$$g_1(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_1(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N)$$

$$g_2(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_2(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N)$$

……………………………………

$$g_t(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_t(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N)$$

(3.9.3)

これより

$$f\{g_1(x_1, \cdots\cdots x_N), g_2(x_1, \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)\}$$

$$\geqq f\{g_1(\xi_1, \cdots\cdots \xi_N), g_2(\xi_1, \cdots\cdots \xi_N) \cdots\cdots g_t(\xi_1 \cdots\cdots \xi_N)\}$$

(3.9.4)

従って(3.9.2)と(3.9.4)より，定義3.8.1の条件を満足するので，

$$f\{g_1(x_1 \cdots\cdots x_N), g_2(x_1 \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)\}$$

は単調増大関数である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

定理　3.9.2

単調増大関数のすべての変数に単調減少関数を代入して得られる関数は単調減少関数である。

証　明

単調増大関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数に単調減少関数 $g_1(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N)$，$g_2(x_1, \cdots\cdots x_N)\cdots\cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

$$x_S \geqq \xi_S \qquad S=1\cdots\cdots N \tag{3.9.5}$$

なら，定義3.9.1より

$$g_1(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_1(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N)$$
$$g_2(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_2(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_t(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N) \leqq g_t(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_S, \cdots\cdots \xi_N) \tag{3.9.6}$$

これと定義3.8.1より

$$f\{g_1(x_1 \cdots\cdots x_N), g_2(x_1 \cdots\cdots x_N)\cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)\}$$
$$\leqq f\{g_1(\xi_1 \cdots\cdots \xi_N),\ g_2(\xi_1 \cdots\cdots \xi_N)\cdots\cdots g_t(\xi_1 \cdots\cdots \xi_N)\} \tag{3.9.7}$$

従って，(3.9.5)と(3.9.7)より定義3.9.1の条件を満足するので，

$$f\{g_1(x_1 \cdots\cdots x_N),\ g_2(x_1 \cdots\cdots x_N)\cdots\cdots g_t(x_1 \cdots\cdots x_N)\}$$

は単調減少関数である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証　了）

単調減少関数の変数に単調減少関数を代入することを繰返し適用すると奇数段目が単調減少関数，偶数段目が単調増大関数となることが，定理3.9.1と定理3.9.2より判る。これは遅れを伴う論理回路の万能性を論じる際に有用な性質である。

3.10　含共軛項関数の性質

定義　3.10.1

1－部分関数（関数自身を含む）に無共軛項がない含正項関数を含共軛項関数と呼ぶ。

定義よりたゞちに次の定理を得る。

定理　3.10.1

含共軛項関数は含正項関数に含まれる。

また，合成関数に対して次の定理がある。

定理　3.1 0.2

含共軛項関数の変数に含共軛項関数を代入して得られる関数は含共軛項関数である。

証　明

含共軛項関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数に，含共軛項関数 $g_1(x_1, \cdots\cdots x_N)$，$g_2(x_1, \cdots\cdots x_N) \cdots\cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

今，$(x_1, \cdots\cdots x_S \cdots\cdots x_N)$ について，2つの値

$(a_1, \cdots\cdots a_S \cdots\cdots a_N)$; $(b_1, \cdots\cdots b_S \cdots\cdots b_N)$

を考える。こゝでどの a_S と b_S も共に 0 でない。すなわち，

$$a_S = b_S = 1 \qquad (3.1\ 0.1)$$

または，

$$a_S = \overline{b_S} \qquad (3.1\ 0.2)$$

が成立つとする。

定義 3.1 0.1 より，1 一部分関数に無共軛項がないこと含正項なることから，

$g_1(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_1(b_1 \cdots\cdots b_N) = 0$

$g_2(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_2(b_1 \cdots\cdots b_N) = 0$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

または

$$g_t(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_t(b_1, \cdots\cdots b_N) = 0 \qquad (3.1\ 0.3)$$

であることはない。

従って，上の関係を再び f に適用して

$$\begin{aligned} & f\{g_1(a_1 \cdots\cdots a_N), g_2(a_1 \cdots\cdots a_N) \cdots\cdots g_t(a_1 \cdots\cdots a_N)\} \\ & = f\{g_1(b_1 \cdots\cdots b_N), g_2(b_1 \cdots\cdots b_N) \cdots\cdots g_t(b_1 \cdots\cdots b_N)\} \\ & = 0 \qquad (3.1\ 0.4) \end{aligned}$$

であることはない。

従って，この 1 一部分関数に無共軛項はない。また，すべての S について（3.1 0.1）が成立するとき（3.1 0.4）が成立しないことより，含正項である。故に，定義 3.1 0.1 より，含共軛項関数である。　（証　了）

3.11 背共軛項関数の性質

定義 3.11.1

0ー部分関数(関数自身を含む)に両共軛項がない背負項関数を背共軛項関数と呼ぶ。

定義より，ただちに次の定理を得る。

定理 3.11.1

背共軛項関数は背負項関数に含まれる。

また，合成関数に対して次の定理がある。

定理 3.11.2

背共軛項関数の変数に背共軛項関数を代入して得られる関数は背共軛項関数である。

証 明

背共軛項関数 $f(y_1, y_2, \cdots\cdots y_t)$ の変数に，背共軛項関数 $g_1(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N)$, $\cdots\cdots\cdots g_t(x_1, \cdots\cdots x_N)$ を代入する。

今，$(x_1, \cdots\cdots, x_S, \cdots\cdots x_N)$ について，2つの値

$(a_1, \cdots\cdots, a_S, \cdots\cdots a_N)$; $(b_1, \cdots\cdots, b_S, \cdots\cdots b_N)$

を考える。こゝで，どの a_S と b_S も共に1でない。すなわち，

$$a_S = b_S = 0 \qquad (3.11.1)$$

または

$$a_S = \overline{b_S} \qquad (3.11.2)$$

が成立つとする。

定義 3.11.1 より，0ー部分関数に両共軛項がないことと背負項なることから，

$g_1(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_1(b_1, \cdots\cdots b_N) = 1$

$g_2(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_2(b_1, \cdots\cdots b_N) = 1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

または

$$g_t(a_1, \cdots\cdots a_N) = g_t(b_1, \cdots\cdots b_N) = 1 \qquad (3.11.3)$$

であることはない。

従って，上の関係を再び f に適用して

$$\begin{aligned} & f\{g_1(a_1\cdots\cdots a_N), g_2(a_1\cdots\cdots a_N)\cdots\cdots g_t(a_1\cdots\cdots a_N)\} \\ & = f\{g_1(b_1\cdots\cdots b_N), g_2(b_1\cdots\cdots b_N)\cdots\cdots g_t(b_1\cdots\cdots b_N)\} \\ & = 1 \end{aligned} \qquad (3.11.4)$$

であることはない。

従って，この０－部分関数に両共軛項はない。また，すべてのSについて（3.11.1）が成立するとき（3.11.4）が成立しないことより，背負項である。故に，定義3.11.1より，背共軛項関数である。　（証　　了）

3.12　線型関数の性質

定義　3.12.1

排他的論理和による展開（3.2.2）で，２次以上の項が現われない関数，つまり

$$f(x_1, \cdots\cdots x_N) = \alpha_0 \oplus \sum_{S=1}^{N} \alpha_S x_S \qquad (3.12.1)$$

なる関数を線型関数と呼ぶ。

（3.12.1）の線型性から容易にわかるように，この合成関数に対して，次の定理が成立する。

定理　3.12.1

線型関数の変数に線型関数を代入して得られる関数は線型関数である。

3.13　単調線型和関数

単調増大関数 $f(x_1, \cdots\cdots, x_N)$ を x_N について展開すると

$$f(x_1 \cdots\cdots x_N) = x_N f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 1) + \overline{x}_N f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 0)$$

$$(3.13.1)$$

こゝで，単調増大なることから，

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_{N-1}, 1) \geqq f(x_1, \cdots\cdots, x_{N-1}, 0) \qquad (3.13.2)$$

であるから，

$$f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 1)$$
$$= f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 1) + f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 0) \qquad (3.13.3)$$

が成立つ。これを（3.13.1）に代入すると，

$$f(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N)$$
$$= x_N \cdot f(x_1, \cdots\cdots\cdots x_{N-1}, 1) + f(x_1, \cdots\cdots x_{N-1}, 0) \qquad (3.13.4)$$

を得る。従って，単調増大関数は否定を含まぬ変数および定数の多項式で表わされる。

つまり，

$$f(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N)$$

$$= \alpha_0 I + \bigvee_{i=1}^{N} \alpha_i x_i + \bigvee_{\substack{i<j \\ i=1}}^{i=N-1} \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots\cdots\cdots + \alpha_{12\cdots N} x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_N$$

（3.1 3.5）

と展開できる。たゞし，α_{ij} 等は０または１の値をとる定数である。

（3.1 3.5）の展開で，２次以上の項の現われない関数を次のように定義する。

定義　3.1 3.1

$$f(x_1, \cdots\cdots x_N) = \bigvee_{S=0}^{N} \alpha_S x_S \qquad (3.1\,3.6)$$

但し，$\alpha_S = 0$ or 1

$x_0 = I$

と一次に展開可能な関数を単調線型和関数と呼ぶ。

この定義と本節に述べたところから，容易に次の定理を得る。

定理　3.1 3.1

単調線型和関数は単調関数に含まれる。

また，（3.1 3.6）の線型性からこの合成関数について，次の定理を得る。

定理　3.1 3.2

単調線型和関数の変数に単調線型和関数を代入して得られる関数は単調線型和関数である。

3.1 4　単調線型積関数の性質

前節の双対として，単調増大関数 $f(x_1 \cdots\cdots x_N)$ は否定を含まぬ変数および定数の多項式で次のように表わされる。

$$f(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N)$$

$$= (\beta_0 + 0)\left\{\bigwedge_{i=1}^{N} (\beta_i + x_i)\right\}\left\{\bigwedge_{\substack{i<j \\ i=1}}^{i=N-1} (\beta_{ij} + x_i + x_j)\right\} \cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\beta_{12\cdots N} + x_1 + x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + x_N\right\} \qquad (3.1\,4.1)$$

たゞし，β_{ij} 等は０または１の値をとる定数である。

（3.1 4.1）の展開で，２次以上の項の表われない関数を次のように定義する。

定義　3.1 4.1

$$f(x_1, \cdots\cdots\cdots x_N) = \bigwedge_{S=0}^{N} (\beta_S + x_S) \qquad (3.14.2)$$

但し，$\beta_S = 0$ or 1

$x_0 = 0$

と一次に展開可能な関数を単調線型積関数と呼ぶ。

この定義と本節で述べたところから，容易に次の定理を得る。

定理　3.1 4.1

単調線型積関数は単調関数に含まれる。

また，（3.1 4.2）の線型性から，この合成関数について，次の定理を得る。

定理　3.1 4.2

単調線型積関数の変数に単調線型積関数を代入して得られる関数は，単調線型積関数である。

3.1 5　結　　論

以上，論理関数の諸性質を明らかにし，主として，自分自身を合成する関数集合について論じた。

すなわち，含正項関数，背負項関数，自己双対関数，単調増大関数，含共軛関数，背共軛関数，線型関数，単調線型和関数，単調線型積関数を定義し，これらが，それぞれ，合成に関して閉じているところを示した。

また，背正項含負項関数，単調減少関数はそれぞれ，その変数にそれぞれの関数を代入することを繰返し適用すると，奇数段目がもとの関数と同種の関数，偶数段目が，それぞれ含正項且つ背負項関数，単調増大関数となることを示した。

本節で定義した関数とその結果は第四章，第五章，第六章で，極大系を構成する極大集合として応用する。

§3.4，§3.5の関数が閉じていることは野崎によって示唆された。

§3.7〜§3.9，§3.1 2は一般によく知られている関数である。

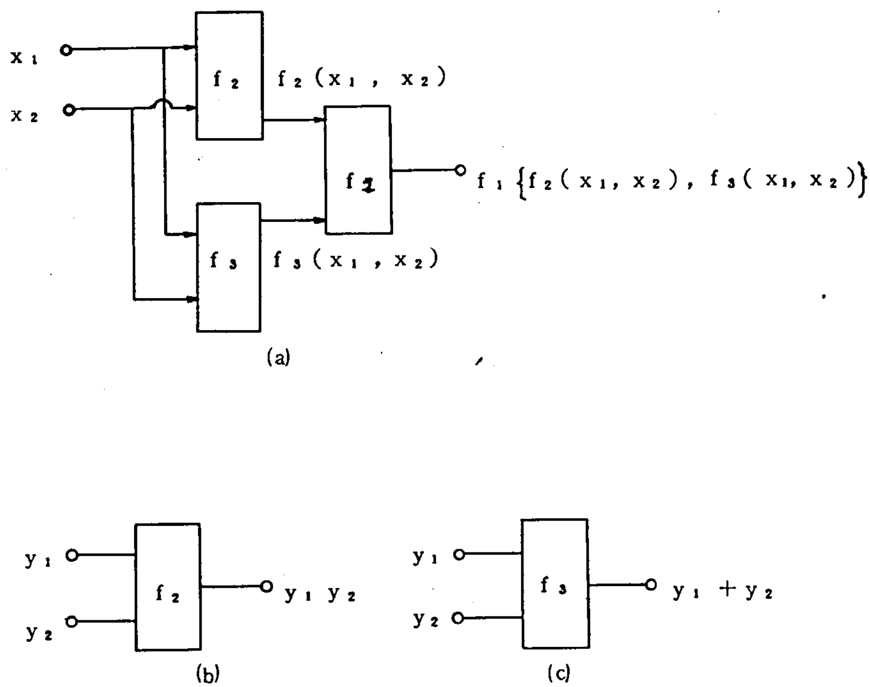
なお，本章の内容の一部は文献〔5〕，〔6〕，〔7〕，〔11〕に発表されている。

第四章　時間要素を考慮しない論理回路の万能性

4.1　緒　　論

本章では，第二章で得られた万能性を論ずる一般的手法の応用として，時間要素を考慮しない論理回路の万能性に適用する。時間要素を考慮しない論理回路の問題は，これを表現する論理関数の問題に帰着できる。

物理的に実現できる実際の回路は入出力間に時間的遅れがあり，実用的な論理回路は入力の時間的変化があるのが常である。しかしながら，スタティック論理回路と呼ばれる論理回路方式をとるものでは，事実上，時間要素を考慮しなくともよい。すなわち，スタティック論理回路では，レジスタとレジスタの間に組合せ論理回路を配し，レジスタの入口にクロック信号でサンプルする。サンプルするクロック信号の周期を論理演算しあう相互の素子の時間遅れの最大より大きくとり，設計上時間遅れを考慮しなくてもよいような回路方式である。



第 4.2.1 図　論理回路の合成

この種の回路方式では本章のような取扱いができる。これに反して，素子自身が一定遅れを持つようなダイナミックな同期式論理回路方式では，設計条件に時間要素を考慮せねばならず，これは第六章で論ずる。

まず，天下り的に5個の集合を与え，これが極大系をなすことを証明する。その結果に基いて論理回路を分類し，各類に特性ベクトルを与え，これを用いて既約万能系を求める。

また2，3の特性ベクトル演算の応用例をあげ，使用法を説明する。

4.2　合成法と万能の定義

時間要素のない論理回路の合成はそれを表現する論理回路の合成の問題に帰着できる。たとえば，第4.2.1図(a)の回路は同図(b)，(c)より構成されている。(b)，(c)の回路はそれぞれ

$$f_2 \equiv y_1 y_2 \qquad (4.2.1)$$

$$f_3 \equiv y_1 + y_2 \qquad (4.2.2)$$

で表現されるとすると，(a)の回路は

$$f_1 \equiv f_2 \{ f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2) \} \qquad (4.2.3)$$

で表現される。つまり，各素子の入力を変数に各素子の出力を関数に対応させることにより，回路とそれを表現する関数とが対応づけられる。従って，以後，理論の取扱いを簡明にするため，回路を表現する論理関数にて取扱う。

まず，N変数以下の2値論理関数を考える。各変数は0，1の2値をとり，そのあらゆる組合せに対して関数は0または1のいずれかの値をとる。N変数以下の関数全体よりなる集合をK^Nと記す。K^Nの任意の部分集合を関数集合と呼び，Fまたは$\{ f_1, f_2, \cdots f_i, \cdots \}$または$\{ f_i \}$のように記す。$f_i$はFの構成要素である。

関数集合$F = \{ f_1 \cdots f_i \cdots f_p \}$から合成される合成関数集合Sをつぎのように回帰的に定義する。

定義　4.2.1

ある論理関数集合$F = \{ f_i \}$に対して，

1）　$F \subset S$　(4.2.3)

2）　$y_1, y_2, \cdots\cdots y_{ni} \in S \cup \{ x_1, \cdots\cdots x_N \}$　(4.2.4)

なら，

$$f_i(y_1, y_2, \cdots\cdots\cdots y_{ni}) \in S \qquad (4.2.5)$$

たゞし，$x_i \cdots\cdots x_N$は独立変数，$n_i \leqq N$とする。

上の条件を満足する最小のSを関数集合Fから合成手続きαで合成された合成関数集合

と呼び，〔F〕$_\alpha$ または〔f_1，…… f_p〕α と記す。

合成の形成が異なっていても関数として等しいもの，たとえば，$x_1 \cdot x_2$ と $\overline{\overline{x_1}+\overline{x_2}}$ は同一とみなす。このことは，この関数で表現される回路についても同様に考える。

定義から明らかなように〔F〕$_\alpha \subset K^N$ である。特に〔F〕$_\alpha = K^N$ なるようなFをN変数以下の万能論理関数集合と呼ぶ。N≧2では特定のNについて万能なることがいえれば，Nに関せず万能なることがいえるので，しばしば，単に万能論理関数集合，または万能系と呼ぶことにする。

4.3　時間要素を考慮しない論理回路の極大系

合成手続きαに対して，前節の意味での万能が定義された場合

M_1：含正項関数全体の集合

M_2：背負項関数全体の場合

M_3：自己双対関数全体の集合

M_4：線型関数全体の集合

M_5：単調増大関数全体の集合

の5つが極大系の三条件を満足することを以下順を追って説明する。

まず，極大系の完全律を満足することを証明するために，ある関数集合が，こゝで撰んだ集合の1つに含まれないとき，その関数集合から，つぎの3つの基本関数のどれが合成できるかを調べ，この基本関数を仲介として任意関数の合成を考察する。

基本関数として

$\overline{x}$，0，1

の3つを考える。

定理　4.3.1

$$F \not\subset M_1 \qquad (4.3.1)$$

なら

$$〔F〕\ni \overline{x} \qquad (4.3.2)$$

または

$$〔F〕\ni 0 \qquad (4.3.3)$$

証明

仮定により，

$$f(y_1, \cdots\cdots y_s) \in F \cap \overline{M}_1 \qquad (4.3.4)$$

なるfが存在する。こゝで，

$$x = y_1 = \cdots\cdots\cdots\cdots = y_S \qquad (4.3.5)$$

とおくと

$$f \in \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \qquad (4.3.6)$$

なら，

$$f(1\cdots\cdots 1) = 0$$

$$f(0\cdots\cdots 0) = 1 \qquad (4.3.7)$$

なることより

$$f \equiv \overline{x} \qquad (4.3.8)$$

また，

$$f \in \overline{M}_1 \cap M_2 \qquad (4.3.9)$$

なら，

$$f(1\cdots\cdots 1) = 0$$

$$f(0\cdots\cdots 0) = 0 \qquad (4.3.10)$$

なることより

$$f \equiv 0 \qquad (4.3.11)$$

従って

$$[F] \ni \overline{x} \qquad (4.3.12)$$

または

$$[F] \ni 0 \qquad (4.3.13)$$

である。　（証　了）

M_1 と M_2 は常に双対の関係にあるので，定理4.3.1と双対な次の定理が成立する。

定理　4.3.2

$$F \not\subset M_2 \qquad (4.3.14)$$

なら

$$[F] \ni \overline{x} \qquad (4.3.15)$$

または

$$[F] \ni 1 \qquad (4.3.16)$$

定理　4.3.3

$$F \not\subset M_3 \qquad (4.3.17)$$

かつ

$$[F] \ni \bar{x} \qquad (4.3.18)$$

なら，

$$[F] \ni 0, 1 \qquad (4.3.19)$$

証明

仮定により，

$$f(y_1, \cdots\cdots y_s) \in F \cap \bar{M}_3 \qquad (4.3.20)$$

なる f が存在する。定理 3.7.1により，f の加法主標準形展開中に少なくとも1組の互いに補な最小項m，m^c が共に存在するか，共に存在しないかである。こゝで

$$m = \bigwedge_{i=1}^{s} (\alpha_i \oplus \bar{y}_i) \qquad (4.3.21)$$

とおき，$\alpha_i = 0$ なる i に対して，

$$\bar{x} = y_i \qquad (4.3.22)$$

$\alpha_i = 1$ なる i に対して

$$x = y_i \qquad (4.3.23)$$

とおけば，m，m^c 以外は 0 となるので，f に無共軛項があるとき，0が得られ，f に両共軛項があるとき 1 が得られる。

$$y_i = \bar{y}_i$$

を最初に代入して，上の操作をすれば，f に無共軛項があるとき，1が得られ，f に両共軛項があるとき，0が得られる。

従って

$$[F] \ni 0,\ 1 \qquad (4.3.24)$$

である。（証　了）

定理　4.3.4

$$F \not\subseteq M_4 \qquad (4.3.25)$$

かつ，

$$[F] \ni \bar{x},\ 0,\ 1 \qquad (4.3.26)$$

なら，Fは万能である。

証明

仮定により，

$$f(y_1, \cdots\cdots y_s) \in F \cap \bar{M}_4 \qquad (4.3.27)$$

なる f が存在する。f を（3.2.2）の形に展開すれば，定義 3.1 2.1 より，二次以上の項が少くとも1つは存在する。そこで二次以上で最低次の項の1つを $\bigwedge_{i=1}^{r} z_i$ とするような

変換，$y_i = z_i$ を施して f_1 を作れば，f_1 はやはり〔F〕に属し，

$$f_1(z_1 \cdots\cdots z_s) \equiv \alpha_0 \oplus \cdots\cdots \oplus \alpha_s z_s \oplus \bigwedge_{i=1}^{r} z_i \oplus (r\text{次以上の項}) \quad (4.3.28)$$

そこで，$z_3, z_4, \cdots\cdots z_r$ に1を，$z_{r+1}, z_{r+2} \cdots\cdots z_s$ に0を代入して得られる二変数関数を f_2 とおけば

$$f_2 \in [F] \quad (4.3.29)$$

$$f_2 \equiv \beta_0 \oplus \beta_1 z_1 \oplus \beta_2 z_2 \oplus z_1 z_2 \quad (4.3.30)$$

こゝに，β_0，β_1，β_2 は0または1の常数である。

$$[F] \ni \overline{x} \quad (4.3.31)$$

であるので，f_2 の z_1 に $\beta_2=0$ なら x_1 を，$\beta_2=1$ なら $\overline{x}_1$ を，つまり，z_1 に $\beta_2 \oplus x_1$ を代入し，同様に z_2 に $\beta_1 \oplus x_2$ を代入して f_3 を作ると

$$[F] \ni f_3 \quad (4.3.32)$$

である。こゝに

$$f_3 \equiv \beta_0 \oplus \beta_1(\beta_2 \oplus x_1) \oplus \beta_2(\beta_1 \oplus x_2) \oplus (\beta_2 \oplus x_1)(\beta_1 \oplus x_2)$$

$$= \beta_0 \oplus \beta_1 \beta_2 \oplus x_1 x_2 \quad (4.3.33)$$

上と同じ理由で

$$[F] \ni f_4 \equiv \beta_0 \oplus \beta_1 \beta_2 \oplus f_3 = x_1 x_2 \quad (4.3.34)$$

また

$$[F] \ni f_5 \equiv f_4\{\overline{f_4(x_1, x_2)}, \overline{f_4(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}\} =$$

$$= \overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} = (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) \cdot (x_1 + x_2) = \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_2 x_1$$

$$= x_1 \oplus x_2 \quad (4.3.35)$$

ゆえに

$$[F] \ni 0,\ 1,\ f_4,\ f_5 \quad (4.3.36)$$

従って，式(3.2.2)より

$$[F] = K^N \quad (4.3.37)$$

Fは万能である。　　（証　了）

定理　4.3.5

$$F \not\subset M_5 \quad (4.3.38)$$

かつ

$$[F] \ni 0,\ 1 \quad (4.3.39)$$

なら

$[F] \ni \overline{x}$ (4.3.40)

である。

証明

仮定により，単調増大でない関数 f がF中に少なくとも1つは存在する。 f を展開して，

$$f(y_1 \cdots\cdots y_i, \cdots\cdots y_s)$$
$$= x_i g(x_1 \cdots\cdots x_{i-1}, x_{i+1} \cdots\cdots x_s) + \overline{x}_i h(x_1 \cdots\cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots\cdots x_s) \qquad (4.3.41)$$

とおけば，適当な i と (s − 1)変数 $x_1 \cdots\cdots x_{i-1}$, $x_{i+1}, \cdots\cdots x_s$の値の組合せが存在して，g = 0，h = 1となることが，定理 3.8.1 よりいえる。そこで，この組合せになるように，(s − 1) 変数に 0，1を代入して得られる関数 f_1 は $\overline{x_i}$ である。従って

$[F] \ni \overline{x}$ (4.3.42)

である。 (証 了)

定理 4.3.6

i = 1……5 のすべてについて，

$F \not\propto M_i$ (4.3.43)

ならば，Fは万能である。

証明

定理 4.3.1 と定理 4.3.2により

$[F] \ni \overline{x}$ (4.3.44)

または

$[F] \ni 0, 1$ (4.3.45)

$[F] \ni \overline{x}$ なら，定理 4.3.3 により，

$[F] \ni \overline{x}, 0, 1$ (4.3.46)

$[F] \ni 0, 1$ なら，定理 4.3.5 により

$[F] \ni \overline{x}, 0, 1$ (4.3.47)

従って，定理 4.3.4 から，Fは万能である。 (証 了)

この定理によって，M_1，………M_5 が極大系の第1の条件，完全律を満足することが明らかとなった。

また，M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 のどれにも属さぬ関数 $\overline{x_1\ x_2}$ が存在することと，定理 3.4.2；定理 3.5.2；定理 3.7.2；定理 3.12.1；定理 3.8.2 より，N≧2なるときこれらはすべて非万能である。従って，極大系の第2条件，非万能律を満足する。

次に，極大系の第3条件，極大律を満足することを示すため，次の定理を証明する。

定理　4.3.7

$N \geqq 3$ なるとき，M_i は他の M_j に含まれない。すなわち

$$M_j \not\supset M_i \quad (i \neq j) \qquad (4.3.48)$$
$$i, j = 1, 2 \cdots\cdots 5$$

証明

これを証明するには $M_i \cap \overline{M}_j$ に属する3変数以下の関数例をあげればよい。

第4.3.1表に示すように，この例は存在する。

第4.3.1表　$M_i \cap \overline{M}_j$ の例

M_i \ $\overline{M}_j$	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{M}_3$	$\overline{M}_4$	$\overline{M}_5$
M_1		$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$
M_2	$x_1\cdot\overline{x}_2$		$x_1\cdot\overline{x}_2$	$x_1\cdot\overline{x}_2$	$x_1\cdot\overline{x}_2$
M_3	$x_1\overline{x}_2+x_1\overline{x}_3+\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2+x_1\overline{x}_3+\overline{x}_2\overline{x}_3$		$x_1\overline{x}_2+x_1\overline{x}_3+\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2+x_1\overline{x}_3+\overline{x}_2\overline{x}_3$
M_4	$x_1\oplus x_2$	1	$x_1\oplus x_2$		$x_1\oplus x_2$
M_5	0	1	0	$x_1\cdot x_2$	

（証　了）

以上の所論により，$M_1 \cdots\cdots M_5$ が $N \geqq 3$ なるときに極大系の3条件を満すことが明らかとなった。よって，次の定理を得る。

定理　4.3.8

$N \geqq 3$ のとき，論理関数の極大系は次の5つの集合を要素とする。

M_1 ：含正項関数全体の集合

M_2 ：背負項関数全体の集合

M_3 ：自己双対関数全体の集合

M_4 ：線型関数全体の集合

M_5 ：単調増大関数全体の集合

定理4.3.7及び，定理4.3.8は，$N \leqq 2$ のときは成立しない。$N=2$ のとき，M_3 は M_4 に含まれ極大ではない。$N=1$ のとき，M_4 は万能であり，M_1，M_2 は M_5 に含ま

れ，極大ではない。N＝0ではM_4，M_5は万能，M_3は空集合である。以後，万能の意味を2変数以下に限らない場合について論ずるので，特にことわらない限り$N \geqq 3$とみなす。

定理4.3.8を時間要素を考慮しない論理回路の場合に翻訳すると次のようになる。

定理　4.3.9

時間要素を考慮しない論理回路は合成手続きαに関して，次の5つの集合が極大系をなす。

M_1 ：含正項関数を表現する回路全体の集合

M_2 ：背負項関数を表現する回路全体の集合

M_3 ：自己双対関数を表現する回路全体の集合

M_4 ：線型関数を表現する回路全体の集合

M_5 ：単調増大関数を表現する回路全体の集合

この定理によって，時間要素を考慮しない論理回路の万能系を論ずる基本となる極大系が求まったので，これに第二章の手法を適用し，種々の問題に応用する。

4.4　万能性に基く分類

まず，回路を極大集合のおのおのに属しているか否かで，

$$2^5 = 32$$

の類に分類する。このうち，回路が存在しない類があり，以下の所論で明らかとなるように実際には15種である。

定理　4.4.1

$$M_3 \subset (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) \cup (M_1 \cap M_2) \qquad (4.4.1)$$

証明

定理3.7.1より自己双対関数は片共軛項のみである。従って，互に共軛な正項と負項の一方しかない。定理3.4.1と定理3.5.1より（4.4.1）が成立する。

（証　了）

定理　4.4.2

$$M_4 \subset (\overline{M}_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2) \cup M_3 \qquad (4.4.2)$$

証明

fが線型なら，

$$f(x_1, \cdots, x_i \cdots, x_N) = \alpha_0 \oplus f(\overline{x}_1 \cdots, x_i, \cdots, \overline{x}_N) \qquad (4.4.3)$$

$\alpha_0 = 0$，または1

である。展開式中 x_i の数が偶数なら，$\alpha_0 = 0$，奇数なら $\alpha_0 = 1$ である。こゝで $\alpha_0 =$ 1なら定義3.7.1より自己双対である。$\alpha_0 = 0$ なら，

$$f(1, \cdots\cdots 1) = f(0, \cdots\cdots 0) = \beta_0 \tag{4.4.4}$$

$\beta_0 = 0$ なら，$\overline{M}_1 \cap M_2$ に含まれ，$\beta_0 = 1$ なら，$M_1 \cap \overline{M}_2$ に含まれる。したがって，定理が成立する。（証　了）

定理　4.4.3

$$M_5 \subset (M_1 \cap M_2) \cup [\{\overline{M}_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2)\} \cap \overline{M}_3 \cap M_4] \tag{4.4.5}$$

証明

単調増大関数 f は

$$f(1, \cdots\cdots 1) \geqq f(0, \cdots\cdots 0) \tag{4.4.6}$$

を満足する。こゝで等号が成立するのは

$f \equiv 0$ と $f \equiv 1$，

の場合に限り，0は $\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$ に1は $M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$ に含まれる。また等号が成立しない場合は

$$f(1, \cdots\cdots\cdots 1) = 1$$
$$f(0, \cdots\cdots\cdots 0) = 0 \tag{4.4.7}$$

だから，$M_1 \cap M_2$ に含まれる。したがって，定理が成立する。（証　了）

こゝで

$A \subset B$

なら，

$\overline{B} \cap A$

は空集合であるから，この関係を上の定理に適用すると，定理4.4.1からは

$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$

$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$

$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$

$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$

$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$

$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$

$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$

$$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$$

は空集合である。

また，定理 4.4.2 から

$$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$$

は空集合である。

また，定理 4.4.3 から

$$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

$$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$$

$$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$$

は空集合である。

以上の所論と上の空集合以外の類には第 4.4.1 表に示すように実際に関数が存在することから，次の定理を得る。

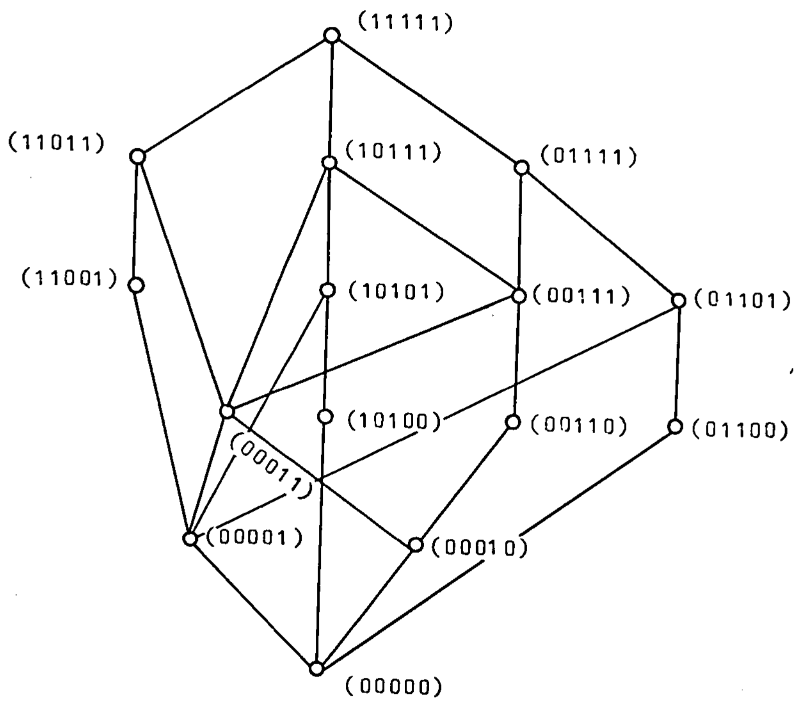
定理　4.4.4

時間要素を考慮しない回路の万能性による分類で空集合でない類は第 4.4.1 表の１５種であり，これに限る。

第 4.4.1 表　万能性に基く分類

番号	特性ベクトル	類の範囲	代表例
1	(1 1 1 1 1)	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
2	(1 1 0 1 1)	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$
3	(1 0 1 1 1)	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 \cdot \overline{x}_2$
4	(0 1 1 1 1)	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 + \overline{x}_2$

番号	特性ベクトル	類の範囲	代表例
5	(1 1 0 0 1)	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$\overline{x}_1$
6	(1 0 1 0 1)	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 \oplus x_2$
7	(0 1 1 0 1)	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 \oplus \overline{x}_2$
8	(0 0 1 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
9	(1 0 1 0 0)	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$	0
10	(0 1 1 0 0)	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$	1
11	(0 0 1 1 0)	$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$	$x_1 \ x_2$
12	(0 0 0 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$
13	(0 0 0 1 0)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$	$x_1 x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
14	(0 0 0 0 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
15	(0 0 0 0 0)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$	x_1



第 4. 4. 1 図　Hasse 線図

第4.4.1表には各類とそれに属する関数中，最も変数の少ないものの一例をあげた。この類の大小関係を示すHasse線図を第4.4.1図に示す。

4.5 特性ベクトルと既約万能系の導出

定義4.2.1の合成法に基いた場合の回路集合特性ベクトルは，集合がM_iに含まれていれば，$a_i=0$，含まれていなければ$a_i=1$として，

$$a:(a_1 \cdots\cdots a_i \cdots\cdots a_5)$$

にて表せる。

第二章で用いた一般的手法は，本章の例にも適用できる。但し，前節の類を撰ぶ際，2^5個の組合せ中，実際には空集合が存在し，その条件を用いると，第二章で述べた定理は一般的な場合よりも強い条件で成立する。2，3の例をあげる。

定理 4.5.1

時間要素を考慮しない論理回路の既約万能系の要素の数pは4より大きくない。

証明

既約万能系の要素をC_1，……C_k，……C_pとする定理2.7.1より，$a_1=1$なるC_kが存在しなければならない。ところが，表4.4.1より，$a_1=1$なるC_kは

$$\omega(C_k)\geqq 2 \qquad (4.5.1)$$

したがって，定理2.7.3より

$$2\leqq\omega(C_k)\leqq 5+1-p \qquad (4.5.2)$$

ゆえに $$P\leqq 4 \qquad (4.5.3)$$

(証　了)

このように一般の場合

$$p\leqq m=5 \qquad (4.5.4)$$

よりも強い条件が成立する。

定理 4.5.2

1個の関数fで万能なるための必要充分条件は

$$f(1\cdots\cdots\cdots 1)=0$$

$$f(0\cdots\cdots\cdots 0)=1$$

かつ，

$$f(\xi_1\cdots\cdots\cdots\xi_N)=f(\bar{\xi}_1\cdots\cdots\cdots\bar{\xi}_N)$$

なるξの組合せが少くとも一つ存在することである。

証明

定理 4.4.2 及び定理 4.4.3 から

$$f \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$$

従って上の条件から

$$f \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$$

で万能である。　（証　了）

この関数は 1 個の関数に対して成立するのであって，関数の集合には成立しない。

さて，第 4.4.1 表に § 2.7 の手法を適用して，既約万能系を求めると，第 4.5.1 表に示す 4 2 種が得られ，定義 2.6.1 の意味で異なる既約万能系はこれ以外にない。

第 4.5.1 表　時間要素を考慮しない論理回路の既約万能系

既約万能系の特性ベクトル	代　表　例
(11111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
(11011) (10111)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 \cdot \overline{x}_2$
(11011) (01111)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 + \overline{x}_2$
(11011) (10101)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 \oplus x_2$
(11011) (01101)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$
(11011) (00111)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
(11011) (10100)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, 0
(11011) (01100)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, 1
(11011) (00110)	$(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$, $x_1 \cdot x_2$
(10111) (01111)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 + \overline{x}_2$
(10111) (11001)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $\overline{x}_1$
(10111) (01101)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$
(10111) (01100)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, 1
(01111) (11001)	$x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1$
(01111) (10101)	$x_1 + \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2$
(01111) (10100)	$x_1 + \overline{x}_2$, 0
(11001) (00111)	$\overline{x}_1$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
(11001) (00110)	$\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$
(11001) (10101) (00011)	$\overline{x}_1$, $x_1 \oplus x_2$, $(x_1, x_2, \overline{x}_3)$
(11001) (10101) (00010)	$\overline{x}_1$, $x_1 \oplus x_2$, (x_1, x_2, x_3)
(11001) (01101) (00011)	$\overline{x}_1$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $(x_1, x_2, \overline{x}_3)$
(11001) (01101) (00010)	$\overline{x}_1$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, (x_1, x_2, x_3)

既約万能系の特性ベクトル				代　表　例
(11001)	(10100)	(00011)		$\overline{x_1}$, 0, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(11001)	(10100)	(00010)		$\overline{x_1}$, 0, (x_1, x_2, x_3)
(11001)	(01100)	(00011)		$\overline{x_1}$, 1, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(11001)	(01100)	(00010)		$\overline{x_1}$, 1, (x_1, x_2, x_3),
(10101)	(01101)	(00111)		$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x_2}$, $x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}$
(10101)	(01101)	(00110)		$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x_2}$, x_1x_2
(10101)	(01101)	(00011)		$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x_2}$, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(10101)	(01101)	(00010)		$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x_2}$, (x_1, x_2, x_3)
(10101)	(00111)	(01100)		$x_1 \oplus x_2$, $x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}$, 1
(10101)	(01100)	(00110)		$x_1 \oplus x_2$, 1, $x_1 \cdot x_2$
(10101)	(01100)	(00011)		$x_1 \oplus x_2$, 1, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(10101)	(01100)	(00010)		$x_1 \oplus x_2$, 1, (x_1, x_2, x_3)
(01101)	(00111)	(10100)		$x_1 \oplus \overline{x_2}$, $x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}$, 0
(01101)	(10100)	(00110)		$x_1 \oplus \overline{x_2}$, 0, $x_1 \cdot x_2$
(01101)	(10100)	(00011)		$x_1 \oplus \overline{x_2}$, 0, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(01101)	(10100)	(00010)		$x_1 \oplus \overline{x_2}$, 0, (x_1, x_2, x_3)
(00111)	(10100)	(01100)		$x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\overline{x_3}$, 0, 1
(10100)	(01100)	(00011)		0, 1, $(x_1, x_2, \overline{x_3})$
(10100)	(01100)	(00110)	(00001)	0, 1, x_1x_2, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
(10100)	(01100)	(00010)	(00001)	0, 1, (x_1, x_2, x_3), $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

上の表で，（a，b，c，）は ab+bc+ca を表す。

4.6 応用例

本節では幾つかの応用例をあげて，本章の結果を如何に実際の問題に適用するかを説明する。

例 1

NAND回路 $\overline{x_1 x_2}$ は万能である。

解

$$f(x_1, x_2) \equiv \overline{x_1 x_2} \tag{4.6.1}$$

の特性ベクトルを次のように求める。

$f(1,1)=\overline{1\cdot 1}=0 \qquad \therefore\ a_1=1$

$f(0,0)=\overline{0\cdot 0}=1 \qquad \therefore\ a_2=1$

$\overline{f(\overline{x_1},\overline{x_2})}=\overline{\overline{\overline{x_1}\ \overline{x_2}}}=\overline{x_1+x_2}\neq\overline{x_1\ x_2} \qquad \therefore\ a_3=1$

$\overline{x_1\ x_2}=1\oplus x_1\ x_2 \qquad \therefore\ a_4=1$

$f(1,1)<f(0,0) \qquad \therefore\ a_5=1$

従って特性ベクトルは

$$(1\ 1\ 1\ 1\ 1)=I \tag{4.6.2}$$

で万能である。

例　2

オア回路 x_1+x_2 と否定回路 $\overline{x_1}$ の組合せは万能である。

解

オア回路の特性ベクトルを求める。

$$f_1(x_1,x_2)\equiv x_1+x_2 \tag{4.6.3}$$

とおく。

$f_1(1,1)=1 \qquad \therefore\ a_1=0$

$f_1(0,0)=0 \qquad \therefore\ a_2=0$

$\overline{f_1(\overline{x_1},\overline{x_2})}=\overline{\overline{x_1}+\overline{x_2}}=x_1\,x_2\neq x_1+x_2 \qquad \therefore\ a_3=1$

$x_1+x_2=x_1\oplus x_2\oplus x_1\,x_2 \qquad \therefore\ a_4=1$

(3.1 4.1)より $\qquad \therefore\ a_5=0$

従って，オア回路の特性ベクトルは

$$(0\ 0\ 1\ 1\ 0)$$

である。

次に，否定回路の特性ベクトルを求める。

$$f_2(x_1)\equiv\overline{x} \tag{4.6.4}$$

とおく。

$f_2(1)=0 \qquad \therefore\ a_1=1$

$f_2(0)=1 \qquad \therefore\ a_2=1$

$\overline{f_2(\overline{x_1})}=\overline{\overline{\overline{x_1}}}=\overline{x_1} \qquad \therefore\ a_3=0$

$\overline{x_1}=1\oplus x_1 \qquad \therefore\ a_4=0$

$f_2(1)<f_2(0) \qquad \therefore\ a_5=1$

従って，否定回路の特性ベクトルは

(1 1 0 0 1)

である。

故に，オア回路と否定回路の組合せの特性ベクトルは，それぞれの成分毎の論理和であるから

$$(0 0 1 1 0) \vee (1 1 0 0 1)$$
$$= (1 1 1 1 1) = I$$

となり，万能である。

例　3

常数のない多数決回路の集合，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \quad \text{なら}\ f = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \quad \text{なら}\ f = 0$$

たゞし，ω_i は正整数で $\sum_{i=1}^{N} \omega_i$ は奇数

にて表現される回路と常数 0 ，1 の組合せは万能でない。これに何を加えれば万能となるか。

解

まず，多数決回路集合の特性ベクトルを求める。

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \qquad \therefore\ f(1 \cdots\cdots 1) = 1$$

$$\therefore\ a_1 = 0$$

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \qquad \therefore\ f(0 \cdots\cdots 0) = 1$$

$$\therefore\ a_2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i (1 - x_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i$$

$$= -\left\{ \sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \right\}$$

$$\therefore f(x_1 \cdots\cdots x_N) = \overline{f(\overline{x}_1 \cdots\cdots \overline{x}_N)} \qquad \therefore\ a_3 = 0$$

$$x_i \geqq \xi_i \ (i = 1 \cdots\cdots N)$$

なら，

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i x_i \geqq \sum_{i=1}^{N} \omega_i \xi_i$$

$$\therefore f(x_1 \cdots\cdots x_N) \geqq f(\xi_1 \cdots\cdots \xi_N) \qquad \therefore\ a_5 = 0$$

非線形な多数決関数は存在するから，特性ベクトルは，

(0 0 0 1 0)

である。

こゝで，常数0，1の特性ベクトルはそれぞれ，(1 0 1 0 0)，(0 1 1 0 0)であるから，これと，多数決回路との組合せの特性ベクトルは

$$(0\,0\,0\,1\,0) \vee (1\,0\,1\,0\,0) \vee (0\,1\,1\,0\,0)$$
$$= (1\,1\,1\,1\,0)$$

定理2.6.3より，これに追加して万能となる回路の特性ベクトルBは

$$B \geqq \overline{(1\,1\,1\,1\,0)} = (0\,0\,0\,0\,1)$$

である。すなわち，非単調増大関数で表現される回路を追加すれば万能となることが判かる。

例．4

二変数以下の論理回路のすべての既約万能系を求めよ。

解

まず，2変数以下の論理回路を特性ベクトルで分類する。M_1 ～M_5 の性質より，判るように変数の置換で，その特性ベクトルは不変だから，変数の置換に関して等しくなる関数は同種と見做して，代表のみをとる。これは次のようになる。

特性ベクトル	回　路
(1 1 1 1 1)	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ ，$\overline{x_1}+\overline{x_2}$
(1 1 0 1 1)	なし
(1 0 1 1 1)	$x_1\overline{x_2}$
(0 1 1 1 1)	$x_1+\overline{x_2}$
(1 1 0 0 1)	$\overline{x_1}$
(1 0 1 0 1)	$x_1 \oplus x_2$
(0 1 1 0 1)	$x_1 \oplus \overline{x_2}$
(0 0 1 1 1)	なし
(1 0 1 0 0)	0
(0 1 1 0 0)	1
(0 0 1 1 0)	$x_1 x_2$，x_1+x_2

(0 0 0 1 1)　　なし

(0 0 0 1 0)　　なし

(0 0 0 0 1)　　なし

(0 0 0 0 0)　　x_1

これを用いて，既約万能系を求めると，次のようになる。

$\overline{x_1}\ \overline{x_2}$

$\overline{x_1}+\overline{x_2}$

$x_1\overline{x_2}$, $x_1+\overline{x_2}$

$x_1\overline{x_2}$, $\overline{x_1}$

$x_1\overline{x_2}$, $x_1\oplus\overline{x_2}$

$x_1\overline{x_2}$, 1

$x_1+\overline{x_2}$, $\overline{x_1}$

$x_1+\overline{x_2}$, $x_1\oplus x_2$

$x_1+\overline{x_2}$, 0

$\overline{x_1}$, x_1x_2

$\overline{x_1}$, x_1+x_2

$x_1\oplus x_2$, $x_2\oplus\overline{x_2}$, $x_1\cdot x_2$

$x_1\oplus x_2$, $x_1\oplus\overline{x_2}$, x_1+x_2

$x_1\oplus x_2$, 1, $x_1\cdot x_2$

$x_1\oplus x_2$, 1, x_1+x_2

$x_1\oplus\overline{x_2}$, 0, $x_1\cdot x_2$

$x_1\oplus\overline{x_2}$, 0, x_1+x_2

4.7 結　論

本章では，第二章の手法を時間要素を考慮しない論理回路に適用して万能系の問題を論じた。

極大系は

含正項数で表現される回路の全体

背負項数で表現される回路の全体

自己双対関数で表現される回路の全体

線形関数で表現される回路の全体

単調増大関数で表現される回路の全体

であることを証明した。

この結果，万能性に関する同値性で，論理回路が１５個の類に分類されること，互に異なる既約万能系は４２種あり，それに限ることが得られた。

§4.6では以上の結果を応用した具体例を示した。

なお，§4.3の完全律の証明は，筆者と苗村と共同で行なった。

本章の内容の一部は文献〔５〕〔６〕〔７〕に発表されている。

第五章　二線式論理回路の万能性

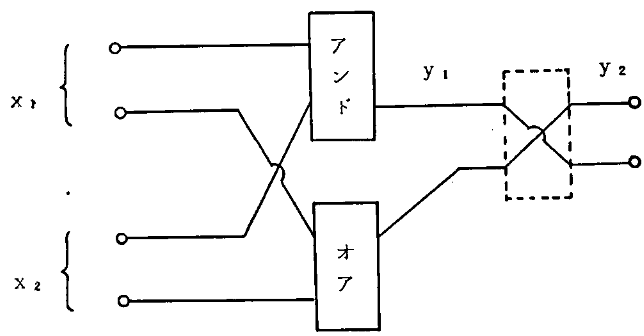
5.1　緒　　論

本章では，第二章で得られた万能性を論ずる一般的手法の応用として，二線式論理回路の万能性を論じる。二線式論理回路の問題は独立変数に変数の肯定否定双方が許される論理関数の問題に帰着できる。

まず，二線式論理回路の表現の定式化を行ない，次に，6個の集合を与え，これが極大系をなすことを証明する。その結果に基いて論理回路を分類し，各類に特性ベクトルを与え，これを用いて既約万能系を求める。また，2，3の特性ベクトル演算の応用例を示す。

5.2　二線式論理回路

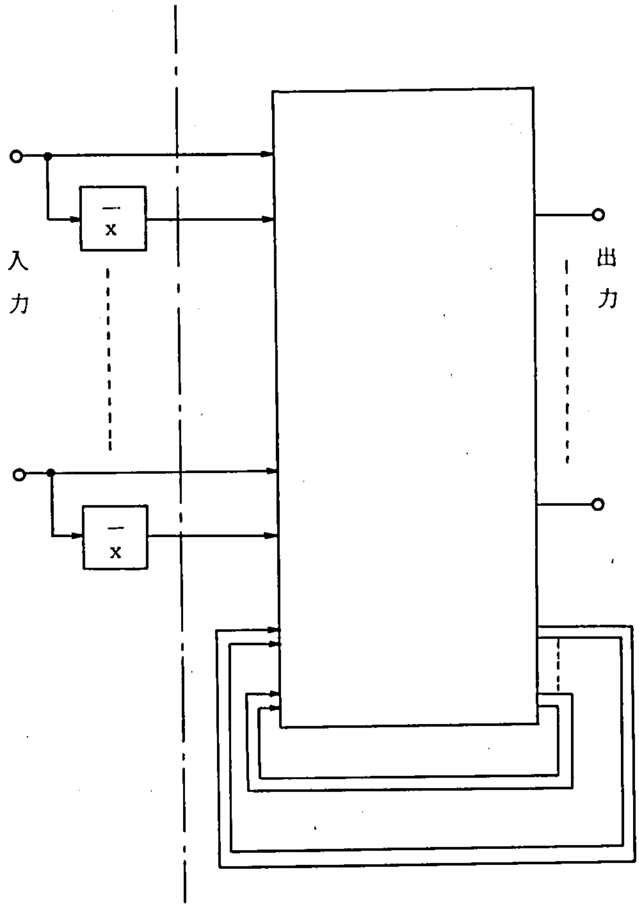
エサキ・ダイオード対回路のように，否定回路を作ることが難かしい回路がある。このような素子を使って任意の論理回路を構成するには第四章で論じたよりもゆるい条件が必要である。この種の回路では，信号の表現法を工夫して，万能系を得ている。二線式論理回路はこの一例である。



第 5.2.1　二線式論理回路によるナンド回路

二線式論理回路は第 5.2.1 図に示すように1つの変数の0，1の値に対応して，信号の組（0，1）（1，0）を与え，この組合せで各変数を表現している。AND回路とOR回路の組合せは，前章の結果よりわかるように，その特性ベクトルが（0 0 1 1 0）で万能でない。しかしながら，二線式論理回路を用いれば，万能であることが知られている。しからば，二線式論理回路の万能の条件は何か，これが本章の議論の中心である。

このような二線式論理回路を一般化して考えると，これは二線式論理を考える系と外部入力との間にのみ否定変換回路を許した系と考え得る。つまり，5.2.2図のような系である。



第5.2.2図　二線式論理回路の一般的構成図

このような回路が万能であるということは図の入力端子を入力・出力端子を出力と考えるとき，一点鎖線の右部分で，任意の出力が作れることである。

この条件が満たされれば，出力の肯定，否定共に合成できるから，任意の信号の組を作り得る。逆に任意の信号組が作れることは，一組の端子の片方に着目すれば，任意の回路が作れることに対応する。

二線式論理回路の個々の回路素子は，通常の論理回路素子と同一であって，それを表現する論理関数に対応づけて論じ得る。

5.3　合成法と万能の定義

第四章の定義 4.2.1 に対応して，二線式論理回路では，合成集合を次のように定義できる。

定義　5.3.1

ある論理関数集合 $F=\{f_i\}$ に対して

1）$F \in S$　　(5.3.1)

2）$y_1,\ y_2,\cdots\cdots y_{ni} \in S \cup \{x_1,\cdots x_N,\ \bar{x}_1,\cdots \bar{x}_N\}$

なら

$$f_i(y_1, y_2, \cdots\cdots y_{ni}) \in S \qquad (5.3.2)$$

たゞし，$x_1,\cdots\cdots x_N$ は独立変数，$n_i \leqq N$ とする。

上の条件を満足する最小の S を集合 F から合成手続き β で合成された合成集合と呼び，

$[F]_\beta$ または $[f_1\cdots f_i \cdots f_p]_\beta$ で表す。

この手続きで $[F]_\beta = K^N$ なるとき，F は万能系である。

合成 β と合成 α との間には次の関係がある。

定理　5.3.1

$$[F]_\beta \supset [F]_\alpha \qquad (5.3.3)$$

証明

今，仮に

$$[F]_\alpha \ni f_0 \qquad (5.3.4)$$

なる f_0 を考える。f_0 は $f_1\cdots f_p,\ x_1,\cdots x_N$ の一部又は全部を繰返し変数に代入して得られる。従って f_0 はまた $f_1\cdots,\ f_p,\ x_1,\cdots,\ x_N,\ \bar{x}_1,\cdots \bar{x}_N$ の一部，つまり $\bar{x}_1,\cdots \bar{x}_N$ を除いたものを繰返し変数に代入して得られる。

従って

$$[F]_\beta \ni f_0 \qquad (5.3.5)$$

故に

$$[F]_\beta \supset [F]_\alpha \qquad (5.3.6)$$

（証　了）

注意

合成 β にて万能なるものは，合成 α にて否定（1 1 0 0 1）と組合せて万能になるもの（0 0 1 1 0）と同じとは限らない。

たとえば，$x_1 x_2$ は否定と組合せて合成 α で万能となるが，これのみでは β で万能ではない。

これは，否定が回路内部に入ることが許されず，入力変換部でのみ許されるという制限条件に基くものである。一般にFで合成βを行なうとき$\overline{[F]_\alpha} \cap [F]_\beta$に含まれる関数で表現される回路を回路内部で用いることは許されず，入力部でのみ用い得る。

しからば，合成手続きβにおいて，如何なる条件で万能となるか，又，任意に与えられ関数組に何を追加すれば万能になるか等を以下考察する。

5.4　二線式論理回路の極大系

合成手続きβに対し，前節の意味での万能が定義された場合

N_1：含共軛項関数で表現される論理回路全体の集合

N_2：背共軛項関数で表現される論理回路全体の集合

N_3：自己双対関数で表現される論理回路全体の集合

N_4：線形関数で表現される論理回路全体の集合

N_5：単調線形和関数で表現される論理回路全体の集合

N_6：単調線形積関数で表現される論理回路全体の集合

の6つが極大系の三条件を満足することを以下順を追って説明する。

まず，極大系の完全律を満足することを証明するために，ある関数集合が，こゝで撰んだ集合の1つに含まれないとき，その関数集合から，つぎの4つの基本関数のどれが合成できるかを調べ，この基本関数を仲介として任意関数の合成を考察する。

基本関数として

$$0,\ 1,\ x_1 + x_2,\ x_1 x_2$$

の4つを考える。

定理　5.4.1

$$F \not\subset N_1 \qquad (5.4.1)$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.2)$$

なら，

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.3)$$

である。

証明

仮定（5.4.1）より

$$f(y_1 \cdots\cdots y_{s'}) \in F \cap \overline{N}_L \qquad (5.4.4)$$

なるfが存在する。定義3.10.1より，fは

i）1一部分関数に無共軛項が存在する。

ii）含正項関数でない。

のいずれかである。

fがi）であるなら，一部の変数に（5.4.2）の1を代入すると，1一部分関数f′は無共軛項

$$m = \bigwedge_{i=1}^{s'} (\alpha_i \oplus \overline{y}_i) = 0 \qquad (5.4.5)$$

$$m^c = \bigwedge_{i=1}^{s'} (\overline{\alpha}_i \oplus \overline{y}_i) = 0 \qquad (5.4.6)$$

を少くとも一つは持つ。

関数f′を加法主標準形で展開したとき，上記の$\alpha_i=1$に対応するy_iにxを，$\alpha_i=0$に対応するy_iに$\overline{x}$を代入すると，上記無共軛項以外はxと$\overline{x}$が打消合う。一方，残ったものは無共軛項であるから，すべての項がなく，0となる。

従って

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.7)$$

また，fがii）であるなら，すべての変数に1を代入して

$$f(1 \cdots\cdots 1) = 0$$

で，やはり，

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.8)$$

である。（証　了）

定理　5.4.2

$$F \not\subset N_2 \qquad (5.4.9)$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.10)$$

なら

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.11)$$

である。

証明

仮定（5.4.9）より

$$f(y_1, \cdots\cdots y_s) \in F \cap N_2 \qquad (5.4.12)$$

なる f が存在する。定義 3.1 1.1 より

f は

ⅰ) 0 一部分関数に両共軛項が存在する。

ⅱ) 背負項関数でない。

のいずれかである。

f が ⅰ) であるなら，一部の変数に (5.4.1 0) の 0 を代入すると，0 一部分関数 f′ は両共軛項

$$m = \bigwedge_{i=1}^{s'} (\alpha_i \oplus \overline{y}_i) = 1 \qquad (5.4.13)$$

$$m^c = \bigwedge_{i=1}^{s'} (\overline{\alpha}_i \oplus \overline{y}_i) = 1 \qquad (5.4.14)$$

を少くとも 1 つは持つ。

関数 f′ を加法主標準形で展開したとき，

上記の $\alpha_i = 1$ に対応する y_i に x を，$\alpha_i = 0$ に対応する y_i に $\overline{x}$ を代入すると，上記両共軛以外は x と $\overline{x}$ が打消合う。一方，残ったものは両共軛項であるから，

$$f = x + \overline{x} = 1 \qquad (5.4.15)$$

となる。

従って

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.16)$$

また，f が ⅱ) であるなら，すべての変数に 0 を代入して

$$f(0 \cdots\cdots 0) = 1$$

で，やはり

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.17)$$

である。 (証 了)

定義 5.4.3

$$F \not\subset N_3 \qquad (5.4.18)$$

なら，

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.19)$$

または

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.20)$$

である。

証明

仮定（5.4.18）より，

$$f(y_1, \cdots\cdots y_s) \in F \cap \overline{N}_s \qquad (5.4.21)$$

なる f が存在する。これを加法主標準形で展開するとき，定理 3.7.1 より，f には無共軛項か両共軛項が存在する。これを

$$m = \bigwedge_{i=1}^{s} (\alpha_i \oplus \overline{y}_i) \qquad (5.4.22)$$

$$m^c = \bigwedge_{i=1}^{s} (\overline{\alpha}_i \oplus \overline{y}_i) \qquad (5.4.23)$$

にて表す。この $\alpha_i = 1$ に対応する y_i に x を，$\alpha_i = 0$ に対応する y_i に $\overline{x}$ を代入すると，上記共軛項以外は x と $\overline{x}$ が打消合う。一方，残った共軛項は，これが無共軛項の場合

$$m = m^c = 0 \qquad (5.4.24)$$

となり，

$$f = 0 \qquad (5.4.25)$$

これが両共軛項の場合

$$f = x + \overline{x} = 1 \qquad (5.4.26)$$

となる。

従って

$$[F]_\beta \ni 0 \qquad (5.4.27)$$

または

$$[F]_\beta \ni 1 \qquad (5.4.28)$$

である。（証　了）

第四章の定理 4.3.4 の M_4 と N_4 とは同じものであるから，これを書き換えると，次の定理を得る。

定理　5.4.4

$$F \not\subset N_4 \qquad (5.4.29)$$

かつ

$$[F]_{\alpha^i} \ni \overline{x} \qquad (5.4.30)$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.31)$$

なら，Fは万能である。

証明

関数0，1は変数を含まぬので，常に入力部で用い得る。4.3の注意で述べたように入力部で用いる場合は合成法αとβとに区別がないので，定理4.3.4よりFは万能である。

（証　了）

定理　5.4.5

$$F \not\subset N_5 \tag{5.4.32}$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \tag{5.4.33}$$

なら

$$[F]_\alpha \ni \bar{x} \tag{5.4.34}$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1 \cdot x_2 \tag{5.4.35}$$

である。

証明

仮定（5.4.32）より，

$$f\ (y_1,\ \cdots y_s) \in F \cap \overline{N}_5 \tag{5.4.36}$$

なるfが存在する。定義3.13.1及び，定理3.13.1より，fは

ⅰ）単調増大関数でない。

ⅱ）2次以上の論理積を含む単調増大関数である。

のいずれかである。

fがⅰ）であれば，前定理と同様の論法で定理4.3.5より

$$[F]_\alpha \in \bar{x} \tag{5.4.37}$$

である。

fがⅱ）であれば，単調増大関数は（3.13.5.）式で展開できるから，変数を適当に名づけ変えることによって

$$f = y_1 + y_2 + \cdots\cdots y_i + y_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdot \cdots\cdots y_{i+j}$$
$$+ \bigvee_{i+j<k\leq s} y_k \cdot f_p\,(y_{i+j}, \cdots) \tag{5.4.38}$$

と主項展開ができる。たゞし，$y_{i+1} \cdot y_{i+2} \cdots\cdots y_{i+j}$は二次以上の最低次の項であり，$f_p$は1でない。従って

$$y_1=\cdots\cdots=y_i=y_{i+j+1}=\cdots\cdots=y_s=0 \qquad (5.4.39)$$

を代入すると

$$f=y_{i+1}\cdot y_{i+2}\cdots\cdots y_{i+j} \qquad (5.4.40)$$

こゝで

$$y_{i+1}=x_1 \qquad (5.4.41)$$

$$y_{i+2}=\cdots\cdots=y_{i+j}=x_2 \qquad (5.4.42)$$

とおけば

$$f=x_1\cdot x_2 \qquad (5.4.43)$$

である。従って，(5.4.34)と(5.4.43)より

$$[F]_\alpha \ni \bar{x} \qquad (5.4.44)$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1\cdot x_2 \qquad (5.4.45)$$

である。　(証　了)

定理　5.4.6

$$F \not\subset N_6 \qquad (5.4.46)$$

かつ

$$[F]_{\beta} \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.47)$$

なら

$$[F]_\alpha \ni \bar{x} \qquad (5.4.48)$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1+x_2 \qquad (5.4.49)$$

である。

証明

仮定(5.4.46)より

$$f(y_1,\cdots\cdots y_s)\in F\cap\bar{N}_6 \qquad (5.4.50)$$

なるfが存在する。定義3.14.1及び，定理3.14.1より，fは

i)単調増大関数でない

ii)2次以上の論理和を含む単調増大関数である。

のいずれかである。

fがi)であれば，前定理の証明と同様にして，

$$[F]_\alpha \ni \bar{x} \qquad (5.4.51)$$

f が ii ）であれば，単調増大関数は（3.1 4.1）式で展開できるから，変数を適当に名づけ変えることによって

$$f = y_1 \cdot y_2 \cdots\cdots y_i \cdot (y_{i+1} + y_{i+2} + \cdots\cdots + y_{i+j}) \cdot \bigwedge_{i+j<k\leq s} \{ y_k + f_p (y_{i+j} \cdots\cdots\cdots) \} \quad (5.4.52)$$

と主項展開ができる。たゞし，$y_{i+1} + y_{i+2} + \cdots + y_{i+j}$ は二次以上の最低次の項であり，f_p は 0 でない。従って

$$y_1 = \cdots\cdots = y_i = y_{i+j+1} = \cdots\cdots = y_s = 1 \quad (5.4.53)$$

を代入すると

$$f = y_{i+1} + y_{i+2} + \cdots\cdots\cdots + y_{i+j} \quad (5.4.54)$$

こゝで

$$y_{i+1} = x_1 \quad (5.4.55)$$

$$y_{i+2} = \cdots\cdots\cdots = y_{i+j} = x_2 \quad (5.4.56)$$

とおけば

$$f = x_1 + x_2 \quad (5.4.57)$$

である。従って（5.4.51）と（5.4.57）より

$$[F]_\alpha \ni \overline{x} \quad (5.4.58)$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1 + x_2 \quad (5.4.59)$$

である。（証　了）

定理　5.4.7

$$[F]_\alpha \ni x_1 \cdot x_2 \quad (5.4.60)$$

かつ

$$[F]_\alpha \ni x_1 + x_2 \quad (5.4.61)$$

なら，

$$[F]_\beta = K^N \quad (5.4.62)$$

である。

証明

論理関数を加法主標準形（3.2.1）で展開する。二線式論理回路では入力に $\overline{x}_s$ が取り得るので，$\bigwedge_{s=1}^{N} (\alpha_{is} \oplus \overline{x}_s)$ は $x_1 \cdot x_2$ を用いて $\{(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3\} \cdot x_4 \cdots\cdots$ と繰返すことに

より，また $\bigvee_{i=0}^{2^N-1} f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{iN}) \bigwedge_{s=1}^{N} (\alpha_{is} \oplus \overline{x}_s)$ の論理和は $x_1 + x_2$ を用いて $\{(x_1 + x_2) + x_3\} + x_4 \cdots\cdots$ と繰返すことによって作り得る。従って

$$[F]_\beta = K^N \tag{5.4.63}$$

Fは万能である。　（証　了）

定理　5.4.8

$i = 1 \cdots\cdots 6$ のすべてについて，

$$F \not\subset N_i \tag{5.4.64}$$

ならば，Fは万能である。

証明

$$F \not\subset N_3 \tag{5.4.65}$$

であるから，定理 5.4.3 より

$$[F]_\beta \ni 0 \tag{5.4.66}$$

または

$$[F]_\beta \ni 1 \tag{5.4.67}$$

一方，定理 5.4.1 より

$$F \not\subset N_1 \tag{5.4.68}$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 1 \tag{5.4.69}$$

なら，

$$[F]_\beta \ni 0 \tag{5.4.70}$$

また，定理 5.4.2 より

$$F \not\subset N_2 \tag{5.4.71}$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0 \tag{5.4.72}$$

なら，

$$[F]_\beta \ni 1 \tag{5.4.73}$$

であるので，

$$F \not\subset N_1 \tag{5.4.74}$$

かつ

$$F \not\subset N_2 \tag{5.4.75}$$

かつ

$$F \not\subset N_3 \qquad (5.4.76)$$

だから，

$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.77)$$

である。

　また，

$$F \not\subset N_5 \qquad (5.4.78)$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.79)$$

なる故，定理5.4.5より

$$[F]_\alpha \ni \overline{x} \qquad (5.4.80)$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1 \cdot x_2 \qquad (5.4.81)$$

　一方，

$$F \not\subset N_6 \qquad (5.4.82)$$

かつ

$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.83)$$

なる故，定理5.4.6より

$$[F]_\alpha \ni \overline{x} \qquad (5.4.84)$$

または

$$[F]_\alpha \ni x_1 + x_2 \qquad (5.4.85)$$

　従って，$F \not\subset N_1$，$F \not\subset N_2$，$F \not\subset N_3$，$F \not\subset N_5$，$F \not\subset N_6$ が同時に成立するとき，

ⅰ）$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.86)$$

　かつ

$$[F]_\alpha \ni \overline{x} \qquad (5.4.87)$$

ⅱ）$$[F]_\beta \ni 0,\ 1 \qquad (5.4.88)$$

　かつ

$$[F]_\alpha \ni x_1 \cdot x_2,\ x_1 + x_2 \qquad (5.4.89)$$

のいずれかである。

　ⅰ）なら，定理5.4.4と $F \not\subset N_4$ なることなら，Fは万能である。

ii）なら，定理5.4.7から万能である。　（証　了）

この定理によって，$N_1 \cdots\cdots N_6$ が極大系の第1条件，完全律を満足することが明らかとなった。

次に$N_1 \sim N_6$が非万能なることを示す。

定理　5.4.9

集合N_1，N_2，N_3，N_4，N_5，N_6 はそれぞれ合成βに関して非万能である。

（$N \geqq 2$）

証明

定理3.10.2及び，定義3.10.1より容易に分るように

$$[N_1]_\alpha = N_1 \not\ni 0 \qquad (5.4.90)$$

0は独立変数の値に無関係であるから，含共軛関数の変数に否定を代入しても構成し得ない。従って

$$[N_1]_\beta \not\ni 0 \qquad (5.4.91)$$

N_1 は合成βに関して非万能である。

これと双対な関係にあるN_2 は同様にして

$$[N_2]_\beta \not\ni 1 \qquad (5.4.92)$$

N_2 は合成βに関し，非万能である。

$\bar{x}$の合成αに関する特性ベクトルは

（11001）

である。従って，$N_3 \cup \bar{x}$，$N_4 \cup \bar{x}$ の合成αに関する特性ベクトルは，それぞれ，

（11011）

（11101）

となり，万能でない。従って，N_3，N_4 はそれぞれ，合成βに関し非万能である。

N_5 に属する関数の変数に否定を代入しても $x_1 x_2$ を作れないから，

$$[N_5]_\beta \not\ni x_1 x_2 \qquad (5.4.93)$$

これと双対なN_6 に対しても同様に

$$[N_6]_\beta \not\ni x_1 + x_2 \qquad (5.4.94)$$

従って，N_5，N_6 はそれぞれ，合成βに関し非万能である。　（証　了）

この定理によって，極大系の第2条件，非万能律を満足する。

次に，極大系の第3条件，極大律を満足することを示すため，次の定理を証明する。

定理　5.4.10

$N \geqq 3$ なるとき，N_i は他の N_j に含まれない，すなわち，

$$N_j \not\supset N_i \quad (i \neq j) \qquad (5.4.95)$$

$i, j = 1, 2 \cdots\cdots 6$

証明

これを証明するには $N_i \cap \overline{N}_j$ に属する3変数以下の関数例をあげればよい。

第5.4.1表　$N_i \cap \overline{N}_j$ の例

N_i ＼ $\overline{N}_j$	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_3$	$\overline{N}_4$	$\overline{N}_5$	$\overline{N}_6$
N_1		$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$	$x_1+\overline{x}_2$
N_2	$x_1\cdot\overline{x}_2$		$x_1\cdot\overline{x}_2$	$x_1\cdot\overline{x}_2$	$x_1\cdot\overline{x}_2$	$x_1\cdot\overline{x}_2$
N_3	$x_1x_2+x_1\overline{x}_3+x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2+x_1\overline{x}_3+x_2\overline{x}_3$		$x_1x_2+x_1\overline{x}_3+x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2+x_1\overline{x}_3+x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2+x_1\overline{x}_3+x_2\overline{x}_3$
N_4	$x_1\oplus x_2$	$x_1\oplus x_2$	$x_1\oplus x_2$		$x_1\oplus x_2$	$x_1\oplus x_2$
N_5	0	1	1	x_1+x_2		x_1+x_2
N_6	0	1	1	$x_1\cdot x_2$	$x_1\cdot x_2$	

第5.4.1表に示すように，この例は存在する。　（証　了）

以上の所論により，$N_1 \sim N_6$ が，$N \geqq 3$ なるときに極大系の3条件を満すことが明らかとなった。よって次の定理を得る。

定理　5.4.11

$N \geqq 3$ のとき，二線式論理回路の極大系は次の6つの集合を要素とする。

N_1：　含共軛項関数で表現される回路全体の集合

N_2：　背共軛項関数で表現される回路全体の集合

N_3：　自己双対関数で表現される回路全体の集合

N_4：　線形関数で表現される回路全体の集合

N_5：　単調線形和関数で表現される回路全体の集合

N_6：　単調線形積関数で表現される回路全体の集合

この定理によって，二線式論理回路の万能系を論ずる基本となる極大系が求まったのでこれに第二章の手法を適用し，種々の問題に応用する。

5.5 万能性に基く分類

まず，回路を極大系のおのおのに属しているか否かで

$$2^6 = 64$$

の類に分類する。このうち，回路が存在しない類があり，以下の所論で明らかとなるように，実際には１２種である。

定理　5.5.1

$$N_3 \subset (\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2) \cup (N_1 \cap N_2) \qquad (5.5.1)$$

証明

N_1 と N_2 は互に双対な関係にある。自己双対関数は自分自身で双対であるから，N_1 の性質を持たぬときは，N_2 の性質も持たない。従って，（5.5.1）の関係が成立する。

（証　了）

定理　5.5.2

$$N_1 \cap N_2 \subset N_3 \qquad (5.5.2)$$

証明

集合 $N_1 \cap N_2$ に属する関数は，無共軛項なく，両共軛項がない。従って，定理 3.7.1 より，自己双対関数である。故に（5.5.2）が成立する。　（証　了）

定理　5.5.3

$$N_5 \cap \overline{(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6)} \subset \overline{N}_3 \qquad (5.5.3)$$

証明

$$f = \bigvee_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \qquad (5.5.4)$$

において，１となる α_i が少なくとも２つある関数，つまり，x を除いた関数は自己双対でない。また，０，１は自己双対でない。従って x を除いた関数集合 N_5 は $\overline{N}_3$ に含まれる。ここで $N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$ は x のみを含むから，（5.5.3）が成立する。

（証　了）

これと双対な関係にある次の定理も成立する。

定理　5.5.4

$$N_6 \cap (N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \subset \overline{N}_3 \qquad (5.5.5)$$

定理　5.5.5

$$N_5 \subset N_1 \cup (\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \qquad (5.5.6)$$

証明

単調線形和関数

$$f = \bigvee_{i=1}^{N} \alpha i \ xi \qquad (5.5.7)$$

のすべての αi が0である場合は，

$$f = 0 \qquad (5.5.8)$$

で，$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$ に含まれる。

αi に1が一つでもあれば，無共範項なく，一部関数にも無共軛項がなく，含正項数である。従って（5.5.6）が成立する。（証　了）

これと双対な次の定理も同様に成立する。

定理　5.5.6

$$N_6 \subset N_2 \cup (N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \qquad (5.5.9)$$

定理　5.5.7

$$N_4 \cap \overline{\{ N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \cup (\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \cup (N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6) \}}$$
$$\subset \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \qquad (5.5.10)$$

証明

$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$，$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$，$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$ はそれぞれ，x，0，1のみを含む。

x，0，1以外の1変数で線形な関数は $\overline{x}$ だけである。

$$\overline{x} \in \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \qquad (5.5.11)$$

線形な関数は，入力変数値中の1の奇偶に従って，定まった関数値をとる。従って，2変数以上の偶数な独立変数を持つ線形関数は共軛項が同一値をとり，無共軛項，両共軛項が共に存在する。

一方，3変数以上の奇数個の独立変数を持つ線形関数に，0または1を代入すると2変数以上の偶数な独立変数を持つ線形関数となる。これは無共軛項，両共軛項が共に存在する。従って，2変数以上の線形関数は $\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2$ に含まれる。

以上の所論により，（5.5.10）が成立する。（証　了）

こゝで

$$A \subset B$$

なら，

$\overline{B} \cap A$

は空集合である。この関係を本節の定理に適用する。

定理　5.5.1 から

$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$

は空集合である。

定理 5.5.2 から

$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6$$

は空集合である。

定理　5.5.3 から

$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$

は空集合である。

定理　5.5.4から

$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$

$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$

は空集合である。

定理　5. 5. 5 から

$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N^2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap N^2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}^2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}^2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6$$

は空集合である。

定理　5. 5. 6 から

$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6$$
$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6$$

$$
\begin{gathered}
\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap N_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6
\end{gathered}
$$

は空集合である。

定理　5.5.7.から

$$
\begin{gathered}
N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
N_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap N_5 \cap \overline{N}_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap N_6 \\
\overline{N}_1 \cap N_2 \cap \overline{N}_3 \cap N_4 \cap \overline{N}_5 \cap \overline{N}_6
\end{gathered}
$$

は空集合である。

以上の所論と上の空集合以外の類には第5.5.1表に示すように実際に関数が存在することから，次の定理を得る。

定理　5. 5. 8

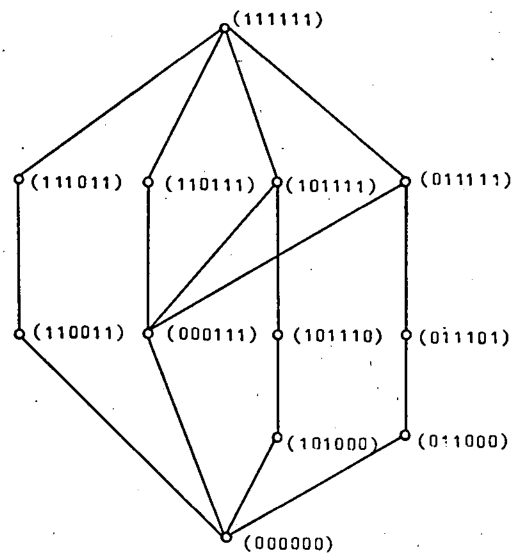
二線式論理回路の万能性による分類で空集合でない類は第 5. 5. 1 表の 1 2 種であり，これに限る。

第 5. 5. 1 表　二線式論理回路の万能性に基く分類

番号	特性ベクトル	類の範囲	代表例
1	(1 1 1 1 1 1)	$\overline{N}_1$ $\overline{N}_2$ $\overline{N}_3$ $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
2	(1 1 1 0 1 1)	$\overline{N}_1$ $\overline{N}_2$ $\overline{N}_3$ N_4 $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$x_1 \oplus x_2$
3	(1 1 0 1 1 1)	$\overline{N}_1$ $\overline{N}_2$ N_3 $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$x_1 x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_3 + x_2 \overline{x}_3$
4	(1 0 1 1 1 1)	$\overline{N}_1$ N_2 $\overline{N}_3$ $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$x_1 \cdot \overline{x}_2$
5	(0 1 1 1 1 1)	N_1 $\overline{N}_2$ $\overline{N}_3$ $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$x_1 + \overline{x}_2$
6	(1 1 0 0 1 1)	$\overline{N}_1$ $\overline{N}_2$ N_3 N_4 $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$\overline{x}_1$
7	(1 0 1 1 1 0)	$\overline{N}_1$ N_2 $\overline{N}_3$ $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ N_6	$x_1 \cdot x_2$
8	(0 1 1 1 0 1)	N_1 $\overline{N}_2$ $\overline{N}_3$ $\overline{N}_4$ N_5 $\overline{N}_6$	$x_1 + x_2$
9	(0 0 0 1 1 1)	N_1 N_2 N_3 $\overline{N}_4$ $\overline{N}_5$ $\overline{N}_6$	$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$
1 0	(1 0 1 0 0 0)	$\overline{N}_1$ N_2 $\overline{N}_3$ N_4 N_5 N_6	0
1 1	(0 1 1 0 0 0)	N_1 $\overline{N}_2$ $\overline{N}_3$ N_4 N_5 N_6	1
1 2	(0 0 0 0 0 0)	N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6	x_1

第 5. 5. 1 表には各類とそれに属する関数中，最も変数の少ないものの一例をあげた。

この類の大小関係を示す Hasse 線図を第 5. 5. 1 図に示す。



第 5. 5. 1 図　Hasse 線図

5.6　特性ベクトルと既約万能系の導出

二線式論理回路の特性ベクトルは，集合がNi に含まれていれば，$a_i = 0$，含まれていなければ $a_i = 1$ として

$$a : (a_1 , \cdots\cdots, a_i , \cdots\cdots a_6)$$

にて表せる。

第二章で用いた一般的手法は，本章の例にも適用できる。但し，前節の類を撰ぶ際，2^6 個の組合せ中，実際には空集合が存在し，その条件を用いると，第二章の定理は一般的な場合よりも強い条件で成立する。一二の例をあげる。

定理　5.6.1

二線式論理回路の既約万能系の要素の数pは3より大きくない。

証　明

既約万能系の要素を $c_1 , \cdots\cdots c_k , \cdots\cdots c_p$ とする。

$$p \geqq 4 \qquad (5.\ 6.\ 1)$$

なるためには，定理2.7.3より

$$\omega (c_k) \leqq 3 \qquad (5.\ 6.\ 2)$$

また，第5.5.1表より，（０００００００）でなく（5.6.2）を満足する類は3個しかない。従って，pは3より大きくなり得ない。（証　了）

このように一般の場合

$$p \leqq m = 6 \qquad (5.\ 6.\ 3)$$

よりも強い条件が成立する。

第5.5.1表よりわかる通り，

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \qquad (5.\ 6.\ 4)$$

なる類は（１１１１１１）に限るので，次の定理が成立する。

定理　5.6.2

一個の関数で万能なるための必要充分条件は，その関数が

$$\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 \cap \overline{N}_3 \cap \overline{N}_4$$

に属することである

さて，第5.5.1表に§2.7の手法を適用して，既約万能系を求めると，第5.6.1表に示す28種が得られ，定義2.6.1の意味で異なる既約万能系はこれ以外にない。

第5.6.1表　二線式論理回路の既約万能系

既約万能系の特性ベクトル	代　表　例
(111111)	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
(111011)　(110111)	$x_1 \oplus x_2$, $(x_1, x_2, \bar{x}_3)$
(111011)　(101111)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot \bar{x}_2$
(111011)　(011111)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 + \bar{x}_2$
(111011)　(101110)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2$
(111011)　(011101)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 + x_2$
(111011)　(000111)	$x_1 \oplus x_2$, (x_1, x_2, x_3)
(110111)　(101111)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $x_1 \cdot \bar{x}_2$
(110111)　(011111)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $x_1 + \bar{x}_2$
(110111)　(101110)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $x_1 \cdot x_2$
(110111)　(011101)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, $x_1 + x_2$
(110111)　(101000)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, 0
(110111)　(011000)	$(x_1, x_2, \bar{x}_3)$, 1
(101111)　(011111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $x_1 + \bar{x}_2$
(101111)　(110011)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $\bar{x}_1$
(101111)　(011101)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $x_1 + x_2$
(101111)　(011000)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, 1
(011111)　(110011)	$x_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1$
(011111)　(101110)	$x_1 + \bar{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$
(011111)　(101000)	$x_1 + \bar{x}_2$, 0
(110011)　(101110)	$\bar{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$
(110011)　(011101)	$\bar{x}_1$, $x_1 + x_2$
(101110)　(011101)	$x_1 \cdot x_2$, $x_1 + x_2$
(000111)　(110011)　(011000)	(x_1, x_2, x_3), $\bar{x}_1$, 1
(000111)　(110011)　(101000)	(x_1, x_2, x_3), $\bar{x}_1$, 0
(000111)　(101110)　(011000)	(x_1, x_2, x_3), $x_1 \cdot x_2$, 1
(000111)　(011101)　(101000)	(x_1, x_2, x_3), $x_1 + x_2$, 0
(101000)　(000111)　(011000)	0, (x_1, x_2, x_3), 1

5.7 応　用　例

本節では幾つかの応用例をあげて，本章で得られた結果を，如何に実際の問題に適用するかを説明する。

例 1

アンド回路とオア回路を用いて，任意の二線式論理回路を構成できる。

解

アンド回路 $x_1\ x_2$ の特性ベクトルを求める。

無共軛項があるので，$a_1=1$ である。

0−部分関数に両共軛項がなく背負項なので，$a_2=0$ である。

自己双対でないので，$a_3=1$ である。

線形でないので，$a_4=1$ である。

単調線形和関数でなく，単調線形積関数であるので，$a_5=1$，$a_6=0$ である。

従って，アンド回路の特性ベクトルは

$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)$$

である。

一方，オア回路 x_1+x_2 の特性ベクトルを求める。

1−部分関数に無共軛項がなく含正項なので，$a_1=0$ である。

両共軛があるので，$a_2=1$ である。

自己双対でなく，線形でないので，$a_3=1$，$a_4=1$ である。

単調線形和関数で，単調線形積関数でないので，$a_5=0$，$a_6=1$ である。

従って，オア回路の特性ベクトルは

$$(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)$$

である。

アンド回路とオア回路の組の特性ベクトルは

$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)\vee(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)=(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \qquad (5.7.1)$$

であり，万能である。

このように，一般の論理回路構成と異なり否定回路を要しない。エサキ・ダイオード回路等の否定回路を得るのに不便な回路で，万能系を構成する際に，応用上重要な性質である。

例 2

常数 0，1が存在するとき，これに何を加えれば万能となるか。

解

常数 0，1 の特性ベクトルは，それぞれ

$$(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

$$(0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

である。従って，この組合せの特性ベクトルは

$$(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0) \vee (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) \qquad (5.7.2)$$

これと組合せて万能となる回路の特性ベクトルは，定理 2.6.3 より

$$(1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1) \qquad (5.7.3)$$

より大きいものである。

第 5.5.1 表より判かるように，否定並びに常数のない三入力多数決回路

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

は上の条件を満足する。つまり，二線式論理回路では常数のない多数決回路と常数 0，1 の組合せのみで，万能である。（§ 4.6 の例 3 と比較）

例 3

二変数以下の論理回路のすべての既約万能系を求めよ。

解

まず，2 変数以下の論理回路を特性ベクトルで分類する。N_1 ～N_6 の性質より，判かるように変数の置換で，その特性ベクトルは不変だから，変数の置換に関して等しくなる関数は同種と做して，代表のみをとる。これは次のようになる。

特性ベクトル	回　路
(1 1 1 1 1 1)	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$, $\overline{x_1} + \overline{x_2}$
(1 1 1 0 1 1)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x_2}$
(1 1 0 1 1 1)	な　し
(1 0 1 1 1 1)	$x_1 \cdot \overline{x_2}$
(0 1 1 1 1 1)	$x_1 + \overline{x_2}$
(1 1 0 0 1 1)	$\overline{x_1}$
(1 0 1 1 1 0)	$x_1 \cdot x_2$
(0 1 1 1 0 1)	$x_1 + x_2$
(0 0 0 1 1 1)	な　し
(1 0 1 0 0 0)	0
(0 1 1 0 0 0)	1
(0 0 0 0 0 0)	x_1

これを用いて既約万能系を求めると，次のようになる。

$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$

$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 \cdot \overline{x}_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 + \overline{x}_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 \cdot \overline{x}_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 + \overline{x}_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \cdot \overline{x}_2$ ， $x_1 + \overline{x}_2$

$x_1 \cdot \overline{x}_2$ ， $\overline{x}_1$

$x_1 \cdot \overline{x}_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \cdot \overline{x}_2$ ， 1

$x_1 + \overline{x}_2$ ， $\overline{x}_1$

$x_1 + \overline{x}_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 + \overline{x}_2$ ， 0

$\overline{x}_1$ ， $x_1 \cdot x_2$

$\overline{x}_1$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \cdot x_2$ ， $x_1 + x_2$

一般の論理回路に比べて，弱い条件で万能となる。一般の回路では非万能で，二線式論理回路で既約万能系となるものは上記２０組の内，次の９組である。

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 \cdot \overline{x}_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \oplus x_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 + \overline{x}_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \oplus \overline{x}_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 \cdot \overline{x}_2$ ， $x_1 + x_2$

$x_1 + \overline{x}_2$ ， $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \cdot x_2$ ， $x_1 + x_2$

このように，二線式論理の万能の条件が弱くてよいのは，極大集合が一般の場合に比べて小さいからである。

定理3.10.1，定理3.11.1より

$$N_1 \subset M_1 \qquad (5.7.4)$$

$$N_2 \subset M_2 \qquad (5.7.5)$$

また，

$$N_3 = M_3 \qquad (5.7.6)$$

$$N_4 = M_4 \qquad (5.7.7)$$

定理3.13.1，定理3.14.1より

$$N_5 \subset M_5 \qquad (5.7.8)$$

$$N_6 \subset M_6 \qquad (5.7.9)$$

である。

二変数以下の関数でこの関係を比較すると第5.7.1表のようになる。

第5.7.1表　極大集合の比較

関数	M_1	N_1	M_2	N_2	M_5	N_5	N_6
0			○	○	○	○	○
1	○	○			○	○	○
x_1	○	○	○	○	○	○	○
$\overline{x}_1$							
$x_1 \cdot x_2$	○		○	○	○		○
$x_1 + x_2$	○	○	○		○	○	
$x_1 \cdot \overline{x}_2$			○	○			
$x_1 + \overline{x}_2$	○	○					
$x_1 \oplus x_2$			○				
$x_1 \oplus \overline{x}_2$	○						
$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$							
$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$							

○は極大集合に含まれるもの

5.8 結　　論

本章では，第二章の手法を二線式論理回路に適用して万能系の問題を論じた。

極大系は

含共軛項関数で表現される回路の全体

背共軛項関数で表現される回路の全体

自己双対関数で表現される回路の全体

線形関数で表現される回路の全体

単調線形和関数で表現される回路の全体

単調線形積関数で表現される回路の全体

であることを証明した。

この結果，万能性に関する同値性で，論理回路が１２個の類に分類されること，互に異なる既約万能系は２８種あり，それに限ることが得られた。

§5.7では，以上の結果を応用した具体例を示した。

なお，第5.6.1表は鎌田により求められた。

本章の内容の一部は文献〔１１〕に発表されている。

第六章　遅れを伴う論理回路の万能性

6.1　緒　　論

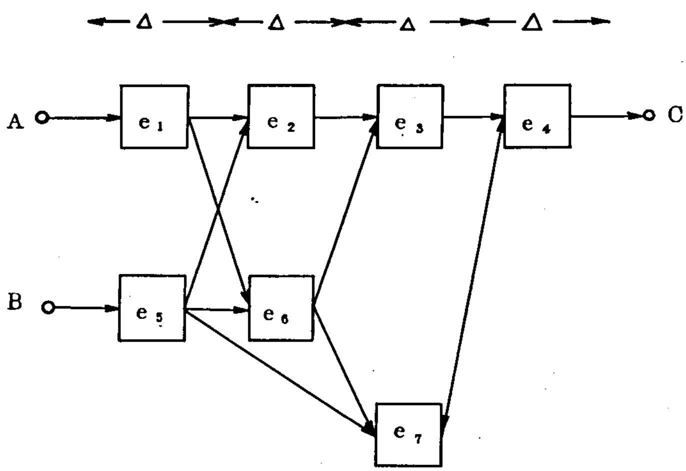
本章では，第二章で得られた万能性を論ずる一般的手法の応用として，一定時間遅れを伴なう論理回路の万能性を論じる。

まず，時間要素を考慮した場合の論理回路の表現を定式化し，万能の定義を与える。次に七個の集合を与え，これが極大系をなすことを証明する。その結果に基づいて論理回路を分類し，各類に特性ベクトルを与え，これを用いて既約万能系を求める。また，二三の応用例を示す。

6.2　遅れを伴なう論理回路

実際の論理回路では，入力に信号が印加されてより，出力に信号が出るまでの間に時間遅れがある。スタテイックな論理回路では，時間要素を考慮せずに取扱え，第四章の手法が通用できたが，パラメトロンのように本質的にクロックと一体になった素子構成では，このような取扱いができない。一般にダイナミックな同期式論理回路と呼ばれるものがそれで，この場合には時間遅れを始めから考慮して論じなければならない。一般に同期式論理回路では共通のクロック信号を用い，この遅れを一定時間間隔の整数倍になるようにしている。

遅れを伴なう論理回路にあっても，印加された信号に時間変化がない場合は，第四章で扱



第 6. 2. 1 図　同期式論理回路

ったと同様に扱うことができるが，時間変化のある場合は事情が異なる。たとえばナンド回路$\overline{x_1 x_2}$は論理関数として万能であるが一定遅れを持つナンド回路のみでは，一般の論理回路を構成できないことが知られている。

本章では，一定遅れを持つ論理回路を取扱う。入力となる独立変数xは，ある時点において0又は1の二値をとり，一定時間間隔△毎の離散的な値のみに着目することにする。この間隔△が回路素子一段の遅れに等しい場合を対象として論ずる。

このような回路の一例を第6.2.1図に示す。e_1，e_2……e_7 はそれぞれ，入力に信号が入ってより出るまでに一定時間遅れ△を要する素子である。

入力Aより出力Cに信号が出るまでに

p_1 ：$e_1 - e_2 - e_3 - e_4$

または

p_2 ：$e_1 - e_6 - e_3 - e_4$

または

p_3 ：$e_1 - e_6 - e_7 - e_4$

なる経路を通る。従ってAよりC迄に4段素子を通り4△の時間を要する。入力より出力迄の信号の伝播時間が基準時間の何倍になるか，その数を路程と呼ぶ。一定時間遅れの回路では，その値が入力より出力迄に通る素子の段数に等しい。上の3種のAよりCに至る路程はすべて4で相等しい。

入力Bより出力Cに至る経路は

p_4 ：$e_5 - e_2 - e_3 - e_4$

または

p_5 ：$e_5 - e_6 - e_3 - e_4$

または

p_6 ：$e_5 - e_7 - e_4$

であり，p_4，p_5 は路程が4であり，p_6 は路程が3である。このようにp_4とp_6では路程に1の差がある。この差を路程差と呼ぶ。つまり，p_4とp_6は路程差が1である。

考慮の対象とする時間範囲をT△とすると，独立変数$x_i(t)$は

$$x_i(\triangle),\ x_i(2\triangle),\ \ x_i(j\triangle),\ \ \ x_i(T\triangle) \qquad (6.2.1)$$

の$x_i(j\triangle)$のそれぞれの値が0又は1のいずれかをとる。ここで，簡単のため（6.2.1）を次のように記す。

$$x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots\cdots x_{ij},\ \cdots\cdots x_{iT} \qquad (6.2.2)$$

縦属変数もまた，

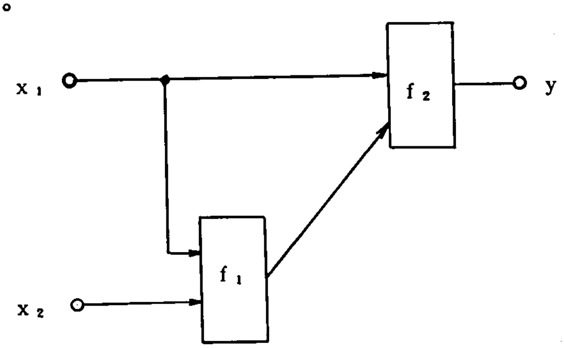
$$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots y_k\cdots\cdots y_T) \qquad (6.2.3)$$

にて表わされる。入力x_1，……x_i，……x_N が f で表現される論理回路に印加されたとき，その出力yの時点kにおける値は

$$y_k=f(x_{11}\ \cdots\cdots x_{1j}\cdots\cdots x_{1\,k-1}\quad x_{21},\cdots\cdots x_{2j}\cdots\cdots,\ x_{2\,k-1};\ \cdots\cdots x_{i1},\ \cdots\cdots$$
$$x_{ij},\cdots\cdots x_{i\,k-1};\ \cdots\cdots x_{N1},\ \cdots\cdots x_{Nj},\ \cdots\cdots x_{N\,k-1}) \qquad (6.2.4)$$

である。

ここに，k−jはyから，x_i迄の路程差である。一般に，入力より，出力までに何段かの回路素子を通り，異なる長さの経路をとる。(6.2.4)の独立変数のうち，k−jが路程と等しいもののみ残る。



第6.2.2図　$y_k=f_2\left\{x_{1\,k-1},\ f_1(x_{1\,k-2}, x_{2\,k-2})\right\}$

たとえば，6.2.2図ではx_1よりyへの路程はf_1を通るものが1，f_1-f_2を通るものが2である。また，x_2よりyへの路程はf_1-f_2を通るので2である。このように，x_1よりyへは路程が1と2であるから

$$k-j=1 \text{ または } 2$$

ずなわち

$$j=k-1 \text{ または } k-2$$

x_2よりyへは路程が2であるから

$$k-j=2$$

すなわち

$$j=k-2$$

である。上にあげたもののみが独立変数として残るから，y_kは

$$x_{1\,k-1},\ x_{1\,k-2},\ x_{2\,k-2}$$

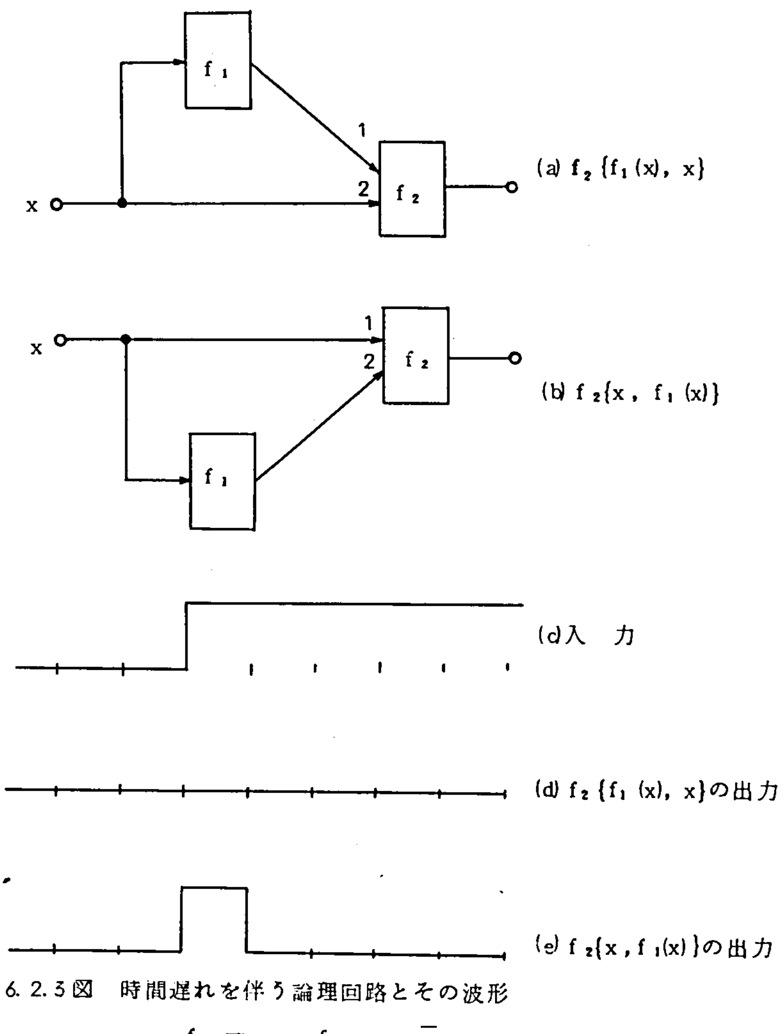
を独立変数として持つ関数

$$y_k = f_2 \{ x_{1\ k-1},\ f_1 (x_{1\ k-2},\ x_{2\ k-2}) \} \qquad (6.2.5)$$

である。

この式から判かるように，f_2 を通る路程1のものと f_1-f_2 を通る路程2のものは同一時刻の入力信号が論理演算しあえず，路程差に等しい時間差のある入力間，すなわち，上例では1の差があるものが，論理演算を行なう。

時間遅れを伴なう回路では，独立変数間の路程差が重要な意味を持つ。たとえば，第6.2.3図（a）（b）の回路に（c）の入力を印加するとそれぞれ，（d）（e）の出力を得る。



第6.2.3図　時間遅れを伴う論理回路とその波形

$$f_1 = x_1\ ,\ f_2 = x_1 \overline{x}_2$$

時間遅れのない回路では

$$f_1 = x_1 \qquad (6.2.6)$$

$$f_2 = x_1 \overline{x_2} \qquad (6.2.7)$$

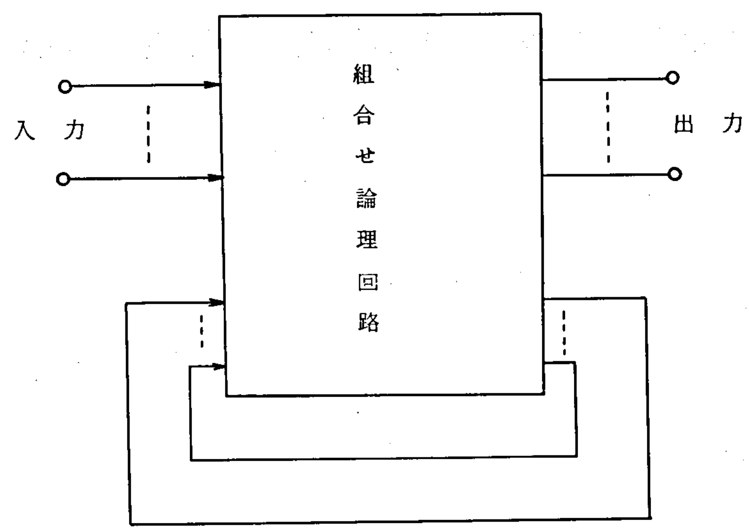
なるとき

$$f_2 \{ f_1(x), x \} = f_2 \{ x, f_1(x) \} = 0 \qquad (6.2.8)$$

であるが，時間遅れのある場合には，このように異なった出力がでる。

また，後に証明するように論理関数として万能なナンド回路も，これに一定遅延を伴なうもので，単調増大関数で表現される回路を合成し得ない。等々，時間要素を考慮しない場合と事情を異にする。

一般に入力の最小時間間隔を不問にするならば，有限オートマトンを表現する順序回路は第6.2.4図に示すように帰還路と路程差一定の組合せ回路とに分解できる。万能性の問題を扱うには，この組合せ回路部を対象として考えればよいから，以後，これについて論ずる。



第6.2.4図　順序回路の構成

6.3　万能の定義

本章において，一定時間遅れの論理回路素子を用いた回路の合成法に関しては，定義4.2.1と同様，通常の接続法とする。但し，変数並びに関数は時間的変化を有するので，路程差を等しくするものの間では，関数として等しいものを同一とみなすが，路程の異なるものは，

同一時刻のものと論理演算ができず，路程差だけ異なる時刻のものと演算し，各時刻毎にまたは，一定時間シフトした各時刻毎に，すべて関数として等しいとき，同一とみなす。上のような合成手続きをγと呼ぶことにし，回路集合により合成手続きγで合成された合成回路集合を$[F]_\gamma$と記す。

時間遅れを伴なう論理回路の万能性を次のように定義する。

定義 6.3.1

ある論理回路の集合に含まれるものと同種の回路で回路を構成することにより，ある有限時間の遅れを不問にすれば，任意の組合せ回路が実現できるとき，この論理回路の集合を万能系と呼ぶ。

前節の議論からわかるように，上の定義の万能系は帰還路を付加することにより，任意の有限オートマトンを実限できる。

考慮の対象としている帰還路のない回路で路程差，すなわち，考慮の対称とする時間差をT，入力の数をNとしたとき，NT個の変数の関数として，この回路を表現できる。この回路の出力が，2^{NT}組の入力組合せのおのおのに対し，0または1のいずれを出すかで$2^{2^{NT}}$個の関数が存在し得る。このすべてを総称してK^{NT}で表わす。

N変数，T時間間隔でFが万能系をなすとは

$$[F]_\gamma \supset K^{NT}$$

なることである。一般には，NTの値以下に関せず，成立する場合を扱う。

6.4 一定時間遅れを伴なう論理回路の極大系

一定時間遅れを伴なう論理回路において

M_1 ：含正項関数で表限される回路全体の集合

M_2 ：背負項関数で表現される回路全体の集合

M_3 ：自己双対関数で表現される回路全体の集合

M_4 ：線形関数で表現される回路全体の集合

M_5 ：単調増大関数で表現される回路全体の集合

M_6 ：単調減小関数で表現される回路全体の集合

M_7 ：背正項含負項関数で表現される回路全体の集合

の七つが極大系の三条件を満足することを以下順を追って証明する。

まず，極大系の完全律を満足することを証明するために，ある回路集合が，ここで選んだ集合の一つに含まれないとき，その関数集合から，つぎの4つの基本回路のどれが合成でき

るかを調べ，この基本回路を仲介として，任意の仕様を満足する回路の合成を考察する。

基本回路として

$$0,\ 1$$

並びに，一定遅れを伴なう

$$x,\ \overline{x}$$

の4つを考える。

定理 6. 4. 1

$$F \not\triangleleft M_1 \qquad (6.4.1)$$

なら

$$[F]_\gamma \ni \overline{x} \qquad (6.4.2)$$

または

$$[F]_\gamma \ni 0 \qquad (6.4.3)$$

証　明

定理 4. 3. 1 の証明の過程において，(4. 3. 5)の操作は，S個の入力をすべて接続することに相当し，合成法 γ においても成立つ。証明の他の部分は，合成法 $\alpha\ \gamma$ に関せず成立つから，本定理が成立する。（証　了）

定理 6. 4. 1 と双対の関係にある次の定理もまた成立する。

定理 6. 4. 2

$$F \not\triangleleft M_2 \qquad (6.4.4)$$

なら

$$[F]_\gamma \ni \overline{x} \qquad (6.4.5)$$

または

$$[F]_\gamma \ni 1 \qquad (6.4.6)$$

である。

定理 6. 4. 3

$$F \not\triangleleft M_3 \qquad (6.4.7)$$

かつ

$$[F]_\gamma \ni x,\ \overline{x} \qquad (6.4.8)$$

なら

$$[F]_\gamma \ni 0,\ 1 \qquad (6.4.9)$$

証　明

定理4.3.3の証明の過程において，（4.3.22）と（4.3.23）は（6.4.8）の前提より，同一路程差の回路を挿入できる。従って，定理4.3.3と同様にして本定理は成立する。

（証　了）

定理6.4.4

$$F \not\subset M_4 \qquad (6.4.10)$$

かつ

$$[F]_r \ni 0,\ 1,\ x,\ \overline{x} \qquad (6.4.11)$$

ならFは万能である。

証　明

定理3.4.3の証明の過程において，関数に関数を代入する操作がある。この際，合成法 r において，合成法 α と同様なことが成立するためには路程差の調節が必要であり，路程差分だけ，単位遅れを伴なう x なる回路を縦属につなぐ必要がある。（6.4.11）の仮定より，これはF中に存在するので，合成法 α の場合と同様にして，本定理が成立する。

（証　了）

定理6.4.5

$$F \not\subset M_5 \qquad (6.4.12)$$

かつ

$$[F]_r \ni x,\ 0,\ 1 \qquad (6.4.13)$$

なら

$$[F]_r \ni \overline{x} \qquad (6.4.14)$$

証　明

路程差調節用の回路，x が（6.4.13）の仮定により存在するので，定理4.3.5より本定理が成立する。

（証　了）

定理6.4.6

$$F \not\subset M_6 \qquad (6.4.15)$$

かつ

$$[F]_r \ni 0,\ 1 \qquad (6.4.16)$$

なら

$$[F]_r \ni x \qquad (6.4.17)$$

証　明

（6.4.15）の仮定により，少なくとも一つの非単調減少関数 $f(y_1 \cdots\cdots y_s)$ が存在する。

$y_1, \cdots\cdots y_s$ の少なくとも一つの値 $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_s$ 並びに i に対して

$$f(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \cdots\cdots, \xi_s)$$
$$> f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \cdots\cdots, \xi_s) \qquad (6.4.18)$$

なぜならば，もし，すべての ξ_1，ξ_s 並びに i に対して（6.4.18）が成立しなければ f は単調減少となり，仮定に反する。

（6.4.18）の各号に対応して，0，1を適当に代入すると

$$f(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \cdots\cdots \xi_s) = 1$$
$$f(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \cdots\cdots \xi_s) = 0 \qquad (6.4.19)$$

だから

$$f(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{i-1}, y_i, \xi_{i+1}, \cdots\cdots \xi_s) = y_i \qquad (6.4.20)$$

を得る。

従って

$$[F]_r \ni x \qquad (6.4.21)$$

（証　了）

定理 6.4.7

$$F \not\subset M_7 \qquad (6.4.22)$$

なら

$$[F]_r \ni x \qquad (6.4.23)$$

または

$$[F]_r \ni 0 \qquad (6.4.24)$$

または

$$[F]_r \ni 1 \qquad (6.4.25)$$

証　明

仮定により

$$f \in F \cap \overline{M}_7 \qquad (6.4.26)$$

なる $f(y_1 \cdots\cdots y_s)$ が存在する。定理 3.6.2 より，

$$\overline{M}_7 = \overline{\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2} = (M_1 \cap M_2) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2) \qquad (6.4.27)$$

この入力を結ぶと，すなわち

$$y_1 = y_2 = \cdots\cdots y_s = x \qquad (6.4.28)$$

とおくと

$f \in M_1 \cap M_2$　なら　x

$f \in \overline{M}_1 \cap M_2$　なら　0

$f \in M_1 \cap \overline{M}_2$　なら　1

となり，定理が成立する。　　（証　了）

定理 6.4.8

$i = 1 \cdots\cdots 7$ のすべてについて

$$F \not\subset M_i \qquad (6.4.29)$$

なら，Fは万能である。

証　明

定理 6.4.1 及び定理 6.4.2 から，

$$[F]_\gamma \ni \overline{x} \qquad (6.4.30)$$

または

$$[F]_\gamma \ni 0,\ 1 \qquad (6.4.31)$$

一方，$\overline{x}$ と 0 で 1 が，$\overline{x}$ と 1 で 0 が合成されることと，定理 6.4.7 より

$$[F]_\gamma \ni x,\ \overline{x} \qquad (6.4.32)$$

または

$$[F]_\gamma \ni 0,\ 1 \qquad (6.4.33)$$

ここで，（6.4.32）が成立すれば，定理 6.4.3 より

$$[F]_\gamma \ni x,\ \overline{x},\ 0,\ 1 \qquad (6.4.34)$$

（6.4.33）が成立すれば，定理 6.4.6 と定理 6.4.5 より，（6.4.34）が成立する。

いずれの場合にも（6.4.34）が成立することと定理 6.4.4 から，Fは万能である。

（証　了）

この定理によって，$M_1 \cdots\cdots M_7$ が極大系の第1条件，完全律を満足することが明らかとなった。

また，M_1，M_2，M_3，M_4，M_5 のいずれにも属さぬ $\overline{x_1 \cdot x_2}$ が存在すること，定理 3.4.2，定理 3.5.2，定理 3.7.2，定理 3.12.1，定理 3.8.2 から，M_1，M_2，M_3，M_4，M_5 は $N \geqq 2$ なるとき非万能である。

M_6，M_7 に関しては，次の二つの定理がある。

定理 6.4.9

一定遅延を伴う論理回路で，M_6 は$N \geqq 2$で非万能である。

証　明

定理3.9.1と定理3.9.2からM_6 に属する回路を奇数段接続したものはM_6 偶数段接続したものはM_5 となる。M_5 にもM_6 にも属さない$x_1 \oplus x_2$ が存在する。一定遅延を伴う論理回路は路程の等しいもののみで論理を行なうから，このことはM_6 が非万能なることを意味する。　（証　了）

同様に，M_7 に関しても定理3.6.3と定理3.6.4より，M_7 または$M_1 \cap M_2$ に属する回路しか合成し得ず，この両者に属さぬ$x_1 \oplus x_2$ が存在するので，次の定理が成立する。

定理 6.4.10

一定遅延を伴う論理回路で，M_7 は$N \geqq 2$で非万能である。

以上の所論により，M_1 ……M_7 は極大系の第2条件，非万能律を満足する。

次に，極大系の第3条件，極大律を満足することを示すため，次の定理を証明する。

定理 6.4.11

$N \geqq 3$なるとき，M_i は他のM_j に含まれない。すなわち

$$M_j \not\supset \overline{M}_i \quad (i \neq j) \qquad (6.4.35)$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots 7$$

証　明

これを証明するためには$M_i \cap \overline{M}_j$に属する3変数以下の例をあげればよい。

第6.4.1表に示すように，この例は存在する。

第6.4.1表　$M_i \cap \overline{M}_j$　の例　（証　了）

	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{M}_3$	$\overline{M}_4$	$\overline{M}_5$	$\overline{M}_6$	$\overline{M}_7$
M_1		$x_1+\overline{x_2}$	$x_1+\overline{x_2}$	$x_1+\overline{x_2}$	$x_1+\overline{x_2}$	$x_1+\overline{x_2}$	$x_1+\overline{x_2}$
M_2	$x_1\overline{x_2}$		$x_1\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$	$x_1\overline{x_2}$
M_3	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2$		$\overline{x_1}x_2+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}x_2+\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	x_1	x_1
M_4	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus \overline{x_2}$	$x_1 \oplus x_2$		$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \oplus x_2$
M_5	0	1	0	$x_1 \cdot x_2$		x_1	0
M_6	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$		0
M_7	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3}$	

以上の所論により，M_1 ……M_7 が$N \geqq 3$なるときに極大系の３条件を満すことが明らかとなった。よって，次の定理を得る。

定理 6.4.1 2

$N \geqq 3$ のとき，一定時間遅れを伴う論理回路の極大系は次の７つの集合を要素とする。

M_1 ：含正項関数で表現される回路全体の集合

M_2 ：背負項関数で表現される回路全体の集合

M_3 ：自己双対関数で表現される回路全体の集合

M_4 ：線形関数で表現される回路全体の集合

M_5 ：単調増大関数で表現される回路全体の集合

M_6 ：単調減少関数で表現される回路全体の集合

M_7 ：背正項含負項関数で表現される回路全体の集合

この定理によって，一定遅延を伴う論理回路の万能系を論ずる基本となる極大系が求まったので．これに第二章の手法を適用し，種々の問題に応用する。

6.5 万能性に基く分類

まず，回路を極大系のおのおのに属しているか否かで

$$2^7 = 128$$

の類に分類する。このうち，回路が存在しない類があり，以下の所論で明らかとなるように，実際には１８種である。

定理 6.5.1

$$M_6 \subset (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) \cup (\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap \overline{M}_7) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap \overline{M}_7) \qquad (6.5.1)$$

証　明

f が単調減少なら

$$f(1 \cdots\cdots 1) \leqq f(0 \cdots\cdots 0) \qquad (6.5.2)$$

を満足する。ここで等号が成立するのは

$$f = 0 \qquad (6.5.3)$$

または

$$f = 1 \qquad (6.5.4.)$$

のときである。

$f=0$ なら，$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap \overline{M}_7$ に属し，$f=1$ なら $M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap \overline{M}_7$ に属する。

等号が成立しないときは

$$f(1\cdots\cdots1)=0$$

$$f(0\cdots\cdots0)=1 \qquad (6.5.5)$$

であるから，$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ に属する。故に定理が成立する。（証　了）

定理 6.5.2

$$(\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5) \cup (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5) \subset M_6 \cap \overline{M}_7 \qquad (6.5.6)$$

証　明

定理 4.4.3 の証明の過程より，(6.5.6) の左辺を満足するものは

$$f \equiv 0$$

$$f \equiv 1 \qquad (6.5.7)$$

のみである。これは共に単調減少であり，また背正項含負項でない。故に $M_6 \cap \overline{M}_7$ に含まれる。（証　了）

定義 3.6.1 より，ただちに次の定理が成立する。

定理 6.5.3

$$M_7 = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \qquad (6.5.8)$$

$M_1 \sim M_5$ は第四章の極大系と一致するので，この組合せに関して，第 4.4.1 表に存在しないものは，本章の場合も存在しない。従って，第 4.4.1 表の各々について M_6 と M_7 の組合せ 4 種に関し，上の三つの定理を適用して，空集合を除く。空集合を表の形にまとめると第 6.5.1 表の通りである。

第 6.5.1 表　　空　集　合

$M_1 \sim M_5$	M_6 M_7	空なる理由
$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap \overline{M}_7$	定理 6.5.3
〃	$\overline{M}_6 \cap \overline{M}_7$	〃
$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap \overline{M}_7$	〃
$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6.5.1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6.5.3
$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6.5.1

$M_1 \sim M_5$	M_6 M_7	空なる理由
$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap \overline{M}_7$	定理 6. 5. 1
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 2
$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap \overline{M}_7$	〃
$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 2
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap \overline{M}_7$	〃
$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4 \cap M_5$	$M_6 \cap M_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap \overline{M}_7$	〃
$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4 \cap M_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \overline{M}_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3
$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5$	$M_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 1
〃	$M_6 \cap \overline{M}_7$	〃
〃	$\overline{M}_6 \cap M_7$	定理 6. 5. 3

以上の所論と上の空集合以外の類には第 6. 5. 2 表に示すように実際に回路が存在することとから，次の定理を得る。

定理 6. 5. 4

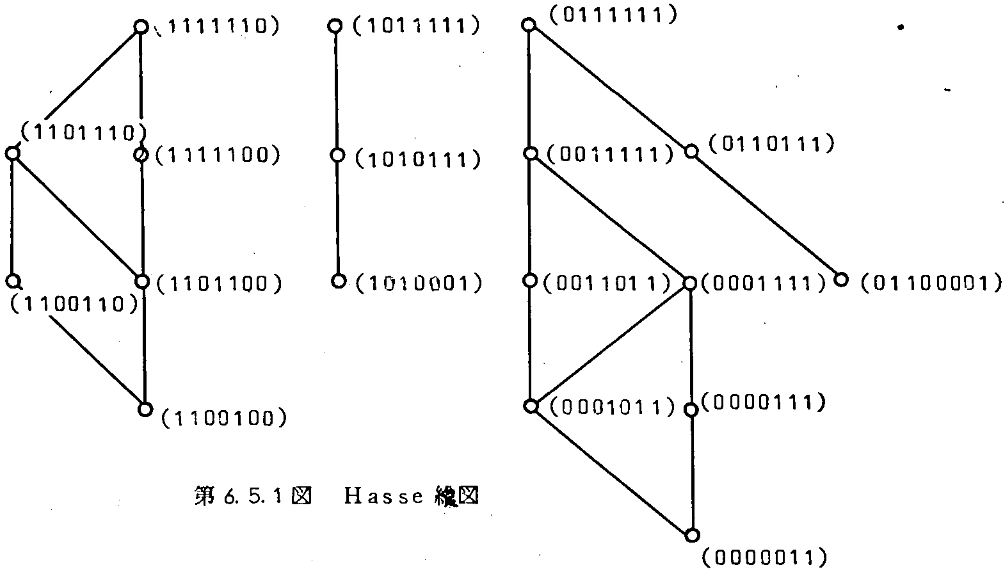
一定遅延を伴う論理回路の万能性による分類で空集合でない類は第 6. 5. 2 表の１８種であり，これに限る。

第 6. 5. 2 表　一定遅延を伴う論理回路の万能性に基づく分類

番号	特性ベクトル	類の分類	代表例
1	(1 1 1 1 1 1 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap M_7$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$
2	(1 0 1 1 1 1 1)	$\bar{M}_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \cdot \bar{x}_2$
3	(0 1 1 1 1 1 1)	$M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 + \bar{x}_2$
4	(1 1 1 1 1 0 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap M_6 \cap M_7$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
5	(1 1 0 1 1 1 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap M_7$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \cdot x_1$
6	(1 0 1 0 1 1 1)	$\bar{M}_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cap M_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \oplus x_2$
7	(0 1 1 0 1 1 1)	$M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap M_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \oplus \bar{x}_2$
8	(0 0 1 1 1 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$
9	(1 1 0 1 1 0 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap M_6 \cap M_7$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1$
1 0	(1 1 0 0 1 1 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap M_7$	$x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_3$
1 1	(0 0 1 1 0 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cap \bar{M}_4 \cap M_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \cdot x_2$
1 2	(0 0 0 1 1 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \bar{M}_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \cdot x_1$
1 3	(1 1 0 0 1 0 0)	$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \bar{M}_5 \cap M_6 \cap M_7$	$\bar{x}_1$
1 4	(1 0 1 0 0 0 1)	$\bar{M}_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6 \cap \bar{M}_7$	0
1 5	(0 1 1 0 0 0 1)	$M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6 \cap \bar{M}_7$	1
1 6	(0 0 0 1 0 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \bar{M}_4 \cap M_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
1 7	(0 0 0 0 1 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap \bar{M}_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
1 8	(0 0 0 0 0 1 1)	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 \cap \bar{M}_6 \cap \bar{M}_7$	x_1

第 6. 5. 2 表には各類とそれに属する関数中，最も変数の少ないものの一例をあげた。

この類の大小関係を示すＨａｓｓｅ線図を第 6. 5. 1 図に示す。



第 6. 5. 1 図　Hasse 線図

6. 6　特性ベクトルと既約万能系の導出

遅延を伴う論理回路の特性ベクトルは，集合がM_i に含まれていれば，$a_i = 0$．含まれていなければ，$a_i = 1$ として

$$a : (a_1 , \cdots\cdots, a_i, \cdots\cdots a_7)$$

にて表わせる。

既約万能系を具体的に求める前に，遅延を伴う論理回路の既約万能系の性質を述べる。空集合の存在の故に第二章の一般定理と異なっている。

定理 6. 6. 1

一定遅延を伴う論理回路の既約万能系の要素の数 p は

$$2 \leqq p \leqq 4 \qquad (6.6.1)$$

である。

証　明

第 6. 5. 2 表より判るように

$$(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

なる特性ベクトルを有する類は空であるので唯一個で万能な回路素子は存在しない。従っ

て，

$$2 \leqq p \qquad (6.6.2)$$

また，$a_4 = 1$ なる特性ベクトル中，重みの最も少ないものが3であり，それは

(0 0 0 1 0 1 1)

のみである。一方 $a_3 = 1$ で，重み3以下のものは

(1 0 1 0 0 0 1)

(0 1 1 0 0 0 1)

の二つであるが，いずれも a_1，a_2，a_3，a_5 中2個所で1となる。従って，上記2種の組合せで，重みは5となり，残りは2であるから，4個より大きくなることはない。従って

$$p \leqq 4 \qquad (6.6.3)$$

である。

さて，第6.5.2表に§2，7の手法を適用して，既約万能系を求めると，第6.6.1表に示す93種が得られ，定義2.6.1の意味で異なる既約万能系はこれ以外にない。

第6.6.1表　一定遅延を伴う論理回路の既約万能系

既約万能系の特性ベクトル	代表例
(1111110) (1011111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \cdot \bar{x}_2$
(1111110) (0111111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 + \bar{x}_2$
(1111110) (1010111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \oplus x_2$
(1111110) (0110111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \oplus \bar{x}_2$
(1111110) (0011111)	$x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
(1111110) (0011011)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \cdot x_2$
(1111110) (0001111)	$x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_1$
(1111110) (1010001)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, 0
(1111110) (0110001)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, 1
(1111110) (0001011)	$x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1111110) (0000111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
(1111110) (0000011)	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$, x_1
(1011111) (0111111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$
(1011111) (1111100)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
(1011111) (1101110)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \cdot x_1$
(1011111) (0110111)	$x_1 \cdot \bar{x}_2$, $x_1 \oplus \bar{x}_2$

既約万能系の特性ベクトル	代　表　例
(1011111) (1101100)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$
(1011111) (1100110)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$
(1011111) (1100100)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, $\overline{x}_1$
(1011111) (0110000)	$x_1 \cdot \overline{x}_2$, 1
(0111111) (1111101)	$x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$
(0111111) (1101110)	$x_1 + \overline{x}_2$, $x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$
(0111111) (1010111)	$x_1 + \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2$
(0111111) (1101100)	$x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$
(0111111) (1100110)	$x_1 + \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$
(0111111) (1100100)	$x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1$
(0111111) (1010001)	$x_1 + \overline{x}_2$, 0
(1111100) (1010111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2$
(1111100) (0110111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$
(1111100) (0011111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$
(1111100) (0011011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$
(1111100) (0001111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$
(1111100) (0001011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
(1111100) (0000111)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
(1111100) (0000011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, x_1
(1101110) (1010111)	$x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, $x_1 \oplus x_2$
(1101110) (0110111)	$x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$
(1101110) (0011111)	$x_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
(1101110) (0011011)	$x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, $x_1 \cdot x_2$
(1101110) (1010001)	$x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, 0
(1101110) (0110001)	$x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, 1
(1010111) (1101100)	$x_1 \oplus x_2$, $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$
(0110111) (1101100)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$
(0011111) (1101100)	$x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$, $\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$
(0011111) (1100110)	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$
(0011111) (1100100)	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$, $\overline{x}_1$
(1101100) (0011011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2$
(1100110) (0011011)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 \cdot x_2$
(0011011) (1100100)	$x_1 \cdot x_2$, $\overline{x}_1$

既約万能系の特性ベクトル	代表例
(1111100) (1100110) (1010001)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 0
(1111100) (1100110) (0110001)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 1
(1010111) (0110111) (0011111)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
(1010111) (0110111) (0011011)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$
(1010111) (0110111) (0001111)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$
(1010111) (0110111) (0001011)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1010111) (0011111) (0110001)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$, 1
(1010111) (1100110) (0001111)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$
(1010111) (1100110) (0001011)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1010111) (0011011) (0110001)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2$, 1
(1010111) (0001111) (1100100)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, $\overline{x}_1$
(1010111) (0001111) (0110001)	$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, 1
(1010111) (1100100) (0001011)	$x_1 \oplus x_2$, $\overline{x}_1$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1010111) (0110001) (0001011)	$x_1 \oplus x_2$, 1, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
(0110111) (0011111) (1010001)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$, 0
(0110111) (1100110) (0001111)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$
(0110111) (1100110) (0001011)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(0110111) (0011011) (1010001)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$, 0
(0110111) (0001111) (1100100)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, x_1
(0110111) (0001111) (1010001)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot x_1$, 0
(0110111) (1100100) (0001011)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $\overline{x}_1$, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
(0110111) (1010001) (0001011)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$, 0, $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1$
(0011111) (1010001) (0110001)	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$, 0, 1
(1101100) (1100110) (1010001)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 0
(1101100) (1100110) (0110001)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 1
(1101100) (0001111) (1010001)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, 0
(1101100) (0001111) (0110001)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, 1
(1101100) (1010001) (0001011)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, 0, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1101100) (1010001) (0000111)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, 0, $x_1 x_2 + x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$
(1101100) (1010001) (0000011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1$, 0, x_1
(1101100) (0110001) (0001011)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, 1, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1101100) (0110001) (0000111)	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$, 1, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
(1101100) (0110001) (0000011)	$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_3\ \overline{x}_1$, 1, x_1

既約万能系の特性ベクトル	代　表　例
(1100110) (0001111) (1010001)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, 0
(1100110) (0001111) (0110001)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, $x_1 x_2 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, 1
(1100110) (1010001) (0001011)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 0, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1100110) (0110001) (0001011)	$x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_3$, 1, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(0001111) (1100100) (1010001)	$x_1 x_2 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, $\overline{x}_1$, 0
(0001111) (1100100) (0110001)	$x_1 x_2 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, $\overline{x}_1$, 1
(0001111) (1010001) (0110001)	$x_1 x_2 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_3 x_1$, 0, 1
(1100100) (1010001) (0001011)	$\overline{x}_1$, 0, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(1100100) (0110001) (0001011)	$\overline{x}_1$, 1, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
(0011011) (1010001) (0110001) (0000111)	$x_1 x_2$, 0, 1, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$
(1010001) (0110001) (0001011) (0000111)	0, 1, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

6.7　応用例

本節では幾つかの応用例をあげて，本章で得られた結果を，如何に実際の問題に適用するかを説明する。

例 1

単位時間の遅れを伴なうナンド回路は万能でない。これに何を追加すれば万能となるか，

解

ナンド回路

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$$

の特性ベクトルは

$$a = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0) \tag{6.7.1}$$

である。定理 2.6.3 から，これに

$$a = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1) \tag{6.7.2}$$

より大きな特性ベクトルを有する回路を追加すれば万能になる。すなわち，非単調減少かつ非背正項含負項関数で表現される回路または，非単調減少関数で表現される回路と非背正項含負項関数で表現される回路との組合せである。

例 2

論理関数として万能なものと単位時間遅延を伴う論理回路 x が存在すれば，遅延を伴う論理回路として万能系を作る。

解

論理関数として万能なものの特性ベクトルは

$$a = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0) \tag{6.7.3}$$

より大である。一方，xの特性ベクトルは

$$b = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1) \tag{6.7.4}$$

である。従って，合成特性ベクトルは

$$a \vee b = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0) \vee (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1) = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) = I \tag{6.7.5}$$

となり万能である。

この例は，Arden の定理[10] を筆者の一般的解法で解いたものである。

例3

常数0，1があるとき，これに何を追加すれば，一定遅延論理回路の万能系が得られるか。

解

常数0，1の特性ベクトルは，それぞれ

$$a = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$$

$$b = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \tag{6.7.6}$$

である。

定理2.6.3より，これに追加して万能となるものcは

$$c \geqq \overline{a \vee b} = \overline{(1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \vee (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)} = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0) \tag{6.7.7}$$

である。

つまり，追加しようとする論理回路の集合Fが，

$$F \not\subset M_4\ ,\ M_5\ ,\ M_6 \tag{6.7.8}$$

なることである。

言換えれば，Fのなかに

線形関数でないもの

単調増大関数でないもの

単調減少関数でないもの

が，それぞれ含まれていることである。

この結果はLoomisが得た定理[13]を筆者の一般的解法で求めたものである。

例4

一定遅延を伴う論理回路ではナンド回路より強い万能性をもったものが存在するか

解

ナンド回路

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2$$

は単調減少，且つ背正合負項であるから，その特性ベクトルは

(1 1 1 1 1 0 0)

である。

$$x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$$

の特性ベクトルは

(1 1 1 1 1 1 0)

でナンド回路のそれより大きい。

ナンド回路は常数と組合せて万能とはならないが，$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$は常数と組合せて万能となる。

また，ナンド回路と組合せて万能となるものは，すべて$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$と組合せて万能となる。

この性質は論理関数または時間要素を考慮しない論理回路の万能性ではみられなかった性質である。

例5

二変数以下の遅れを伴う論理回路のすべての既約万能系を求めよ。

解

まず，二変数以下の論理回路を特性ベクトルで分類する。M_1 ～ M_7の性質より判るとうり変数の置換で，特性ベクトルは不変だから，変数の置換に関して等しくなる関数は同種とみなして，代表のみをとる。これは次のように分類される。

特性ベクトル	回　路
(1 1 1 1 1 1 0)	なし
(1 0 1 1 1 1 1)	$x_1 . \overline{x}_2$
(0 1 1 1 1 1 1)	$x_1 + \overline{x}_2$
(1 1 1 1 1 0 0)	$\overline{x}_1 . \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$
(1 1 0 1 1 1 0)	なし
(1 0 1 0 1 1 1)	$x_1 \oplus x_2$
(0 1 1 0 1 1 1)	$x_1 \oplus \overline{x}_2$

(0 0 1 1 1 1 1)	なし
(1 1 0 1 1 0 0)	なし
(1 1 0 0 1 1 0)	なし
(0 0 1 1 0 1 1)	$x_1 \cdot x_2$, $x_1 + x_2$
(0 0 0 1 1 1 1)	なし
(1 1 0 0 1 0 0)	$\overline{x}_1$
(1 0 1 0 0 0 1)	0
(0 1 1 0 0 0 1)	1
(0 0 0 1 0 1 1)	なし
(0 0 0 0 1 1 1)	なし
(0 0 0 0 0 1 1)	x_1

これを用いて，既約万能系を求めると，次の通りである。

$\underline{x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ x_1 + \overline{x}_2}$

$x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ \underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2}$

$x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ \underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$

$\underline{x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ x_1 \oplus \overline{x}_2}$

$\underline{x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ \overline{x}_1}$

$\underline{x_1 \cdot \overline{x}_2 ,\ 1}$

$x_1 + \overline{x}_2 ,\ \underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2}$

$x_1 + \overline{x}_2 ,\ \underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$

$\underline{x_1 + \overline{x}_2 ,\ x_1 \oplus x_2}$

$\underline{x_1 + \overline{x}_2 ,\ \overline{x}_1}$

$\underline{x_1 + \overline{x}_2 ,\ 0}$

$\underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} ,\ x_1 \oplus x_2$

$\underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} ,\ x_1 \oplus \overline{x}_2$

$\underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} ,\ x_1 \cdot x_2$

$\underline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2} ,\ x_1 + x_2$

$\underline{x_1 \cdot \overline{x}_2} ,\ x_1$

$\underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} ,\ x_1 \oplus x_2$

$\underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} ,\ x_1 \oplus \overline{x}_2$

$\underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} ,\ x_1 \cdot x_2$

$\underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} ,\ x_1 + x_2$

$\underline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} ,\ x_1$

$\underline{x_1 \cdot x_2 ,\ \overline{x}_1}$

$\underline{x_1 + x_2 ,\ \overline{x}_1}$

$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$

$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 + x_2$

$x_1 \oplus x_2$, $x_1 \cdot x_2$, 1

$x_1 \oplus x_2$, $x_1 + x_2$, 1

$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 \cdot x_2$, 0

$x_1 \oplus \overline{x}_2$, $x_1 + x_2$, 0

論理関数の場合に既約でないものが，遅延論理回路では既約となっている。このように第四章の場合より強い条件が要求される。上表のなかで，アンダラインを引いた部分が関数として既約なものである。どの程度強い条件が必要かが明らかであろう。

6.8. 結　論

本章では第二章の手法を一定遅延を伴う論理回路に適用して万能系の問題を論じた。

極大系は

含正項関数で表現される回路の全体

背負項関数で表現される回路の全体

自己双対関数で表現される回路の全体

線形関数で表現される回路の全体

単調増大関数で表現される回路の全体

単調減少関数で表現される回路の全体

背正項含負項関数で表現される回路の全体

であることを証明した。

この結果，万能性に関する同値性で，論理回路が１８個の類に分類されること，互に異なる既約万能系は９３種あり，それに限ることが得られた。

§６，７では，以上の結果を応用した具体例を示した。また，Arden，Loomis 等が特定の場合に得ている定理を筆者の一般的解法で解けることを示した。

なお，第 6. 6. 1 表は寺脇により求められた。

本章の内容の一部は文献〔１１〕に発表されている。

第七章　結　　論

7.1 本研究の成果

自動交換機，計算機，制御機器等に用いられる制御回路は一般に少数種の組で構成されているが，この組に何を撰べば任意の機能が得られるかという万能性の問題に関して，一般的な理論を確立し，従来個々に扱われて研究されていた問題に一般的解法を与えた。

得られた主要な結果を要約すると

(1) 論理回路の万能性を論じる際に，万能系を構成するという意味での同値性を万能そのものより定義した。一方，論理関数として有限個の操作で検証しやすい極大系という概念を導入し，これを定義する三条件を示した。極大系の要素に含まれるか否かで，論理回路を分類したとき，上の同値性による分類と一致することを証明した。（第二章）

(2) 特性ベクトルとその演算を定義し，その物理的意味を明らかにし，万能系を求める問題非万能系に追加して万能となる集合を求める問題等が代数的に解けるようにした。(第二章)

(3) 合成法，万能の定義等に関せず，一般的な既約万能系を求めるアルゴリズムを与えた。（第二章）

(4) 種々の合成法において極大系の要素となる関数集合を定義し，その性質を求めた。（第三章）

(5) 一般的な解法を応用して，論理関数並びに時間要素を考慮しない論理回路の極大系を求め，五つの集合からなることを示し，万能論の一般解を得た。これを用いて，１５個の同値類を得，４２種の本質的に異なる既約万能系の類を得，本質的に異なるものは，これ以外にないことを示した。（第四章）

(6) 一般的解法を用いて，二線式論理回路の極大系を求め，六つの集合からなることを示し，万能論の一般解を得た。これを用いて１２個の同値類を得，２８種の本質的に異なる既約万能系の類を得，本質的に異なるものは，これ以外にないことを示した。（第五章）

(7) 一般的解法を用いて，一定遅延を伴う論理回路の極大系を求め，七つの集合からなることを示し，万能論の一般解を得た。これを用いて１８個の同値類を得，９３種の本質的に異なる既約万能系の類を得，本質的に異なるものは，これ以外にないことを示した。（第六章）

以上により，新しく論理回路素子として，与えられたものが万能であるか否かを容易に検証する手段を与え，かつ，非万能な素子があったとき，これに何を追加すれば万能になるか

という問題を代数的に解く解法を与え，論理回路の万能系構成設計の基本を確立し，それを実際例に応用した。

また，第二章の理論は，第四，五，六章以外の種々の接続条件のときにも適用でき，集積回路の周期的構造回路等の万能性を論ずる場合に応用されるであろう手法の基本を与え，将来の理論発展の基礎を確立した。

7.2 謝　　辞

本論文作成に当り，構成並びに内容について，種々御教示頂いた京都大学前田憲一教授，坂井利之教授に深謝する。

また，本研究完成の各過程において，御協力頂いた野崎昭弘，苗村憲司，鎌田光帯，寺脇元二の各氏並びに本論文の査読と御討論を頂いた池野信一第一研究室室長に感謝する。

文　　献

(1) E. V. Huntington

"Sets of Independent Postulates for the algebra of logic" Tr. Am. Math. Soc. 5 p.p 288-309, 1904

(2) H. M. Sheffer

"A Set of five independent postulates for boolean algebras with application to logical constants" Tr. Am. Math. Soc. 14 p.p 481-488, 1913

(3) E. L. Post

"The two-valued iterative systems of mathematical logic" Annals of Mathematics Studies, 5, Princeton Univ. Press, 1941

(4) W. Wernick

"Complete sets of logical functions" Tr. Am. Math. Soc. 51 p.p. 117-132, 1942

(5) 伊吹公夫，苗村憲司，野崎昭弘

"万能論理関数系の一般論" オートマトンと自動制御研究会資料 84，1963

(6) 伊吹公夫，苗村憲司，野崎昭弘

"万能論理関数系の一般理論" 電気関係四学会連大講演論文集 33，1963

(7) 伊吹公夫，苗村憲司，野崎昭弘

"万能論理関数系の一般論"信学誌，46，№7，p. p 934－940，1964
(8) S. C. Kleene
"Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata" Automata Studies, Princeton Univ. Press. N. J., 1956
(9) M. L. Minsky
"Some universal elements for finite antomata" Automata Studies, Princeton Univ. Press, N. J., 1956
(10) D. N. Arden
"Delayed logic and finite state machines" Quarterly Progress Rept №62 M. I. T. Research Lab., Lexington Mass, July 9561, p. p. 163－189
(11) 伊吹公夫，鎌田光帯，寺脇元二
"万能論理関数系理論の拡張"昭39信学会全大59
(12) H. H. Loomis Jr. &R. H. Wyman Jr.
"On complete sets of logic primitives" I.E.E.E. Tr. EC－14〔2〕，p. p. 173－174，1965
(13) H. H. Loomis Jr
Completeness of sets of delayed logic devices" I.E.E.E. Tr. EC. 14〔2〕p. p. 157－172 1965
(14) 喜安善市
"デジタル回路の数学"共立，1960